



**Sociedad Castellana y Leonesa
de Educación Matemática**
Miguel de Guzmán



XIII CONGRESO DE MATEMÁTICAS DE CASTILLA Y LEÓN

15, 16 de abril de 2016

PITAGÓRICOS: SIMETRÍA, ARMONÍA...

Constantino de la Fuente Martínez

Instituto de Educación Secundaria *Cardenal López de Mendoza*, Burgos

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*



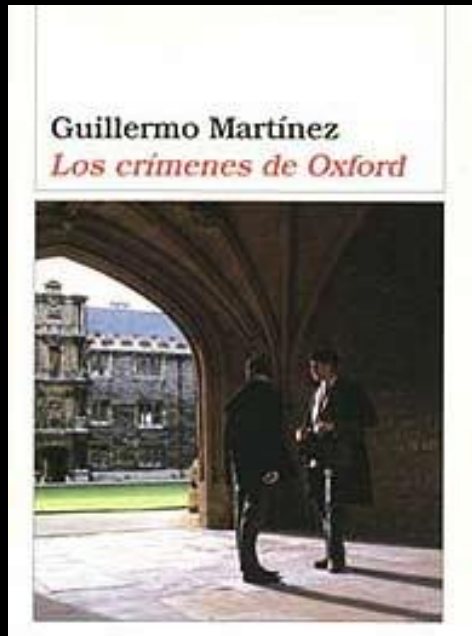
PROPUESTA

- Acercamiento y reflexión sobre estas ideas clásicas
- Visualización de algunos procesos y resultados de proyectos de investigación matemática en ESO y BACH
- *Percepción consciente de resonancias lógicas y afectivas*

PITAGÓRICOS

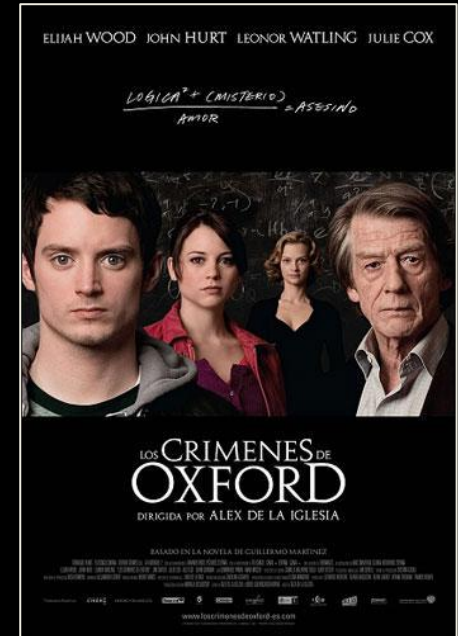
LOS CRÍMENES DE OXFORD

GUILLERMO MARTÍNEZ



ARGUMENTO

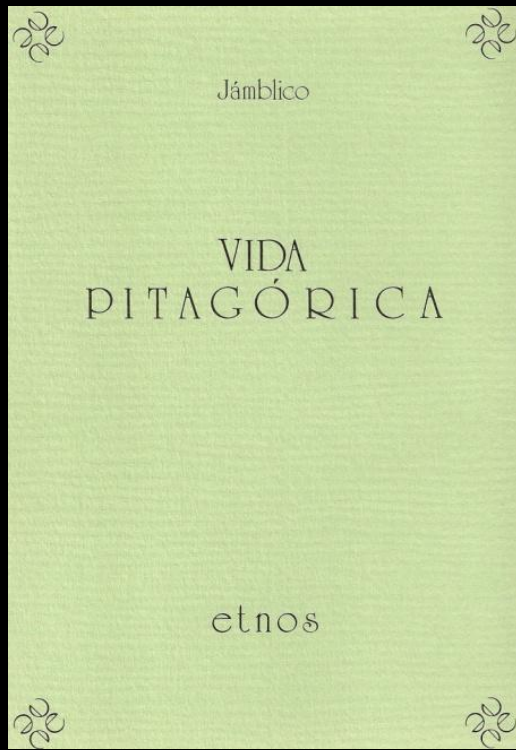
MATEMÁTICAS



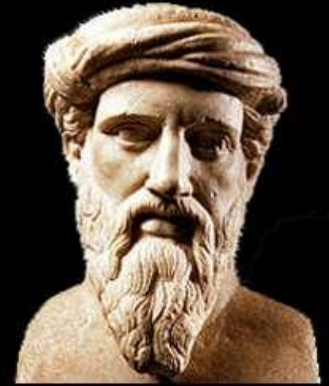
Ah, La hermandad de los pitagóricos... El círculo, el pez... Si mal no recuerdo son los primeros números simbólicos de la secta, ¿no es cierto?... El tercero es el triángulo y el cuarto es la Tetraktys.

(Los Crímenes de Oxford, p. 143)

Jámblico de Calcis (245-¿330?)
“Vida Pitagórica”



*LA HERMANDAD
DE LOS PITAGÓRICOS*



Dos clases de componentes:

- Pitagoristas, exotéricos o acusmáticos*
- Pitagóricos, esotéricos o matemáticos.*

Pitagoristas, exotéricos o acusmáticos

- *Memorizaban conjeturas y resultados matemáticos pero no tenían acceso a sus demostraciones*
- *Permanecían así por un lapso no menor de cinco años*
- *No podían conocer físicamente al maestro. No tenían permiso para entablar conversaciones con él, ni para formularle preguntas*
- *Sólo podían escuchar la voz de Pitágoras desde el otro lado de la cortina.*
- *Éstos eran los acusmáticos o los que oyen.*

*Pitágoras y Teano
con sus discípulos*



Pitagóricos, esotéricos o matemáticos:

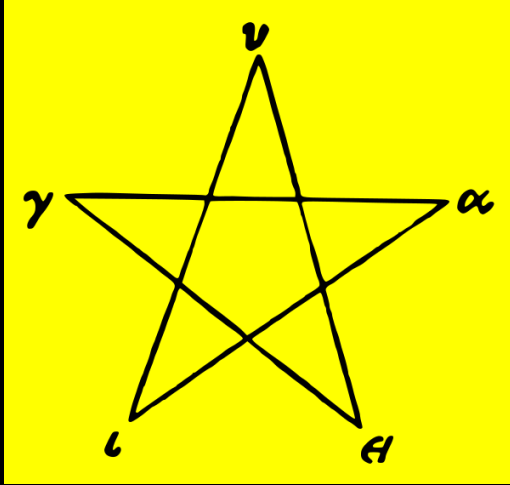
- *Conducta obligada por las normas de la Hermandad*
- *Comprendían los resultados de los problemas y sus justificaciones*
- *Se encontraban del lado donde el maestro daba sus lecciones, podían verlo y escucharlo*
- *Eran los matemáticos o los que conocen.*



Pitagóricos celebrando el amanecer

Fyodor Bronnikov

Símbolo de la Hermandad



Pentagrama místico pitagórico.

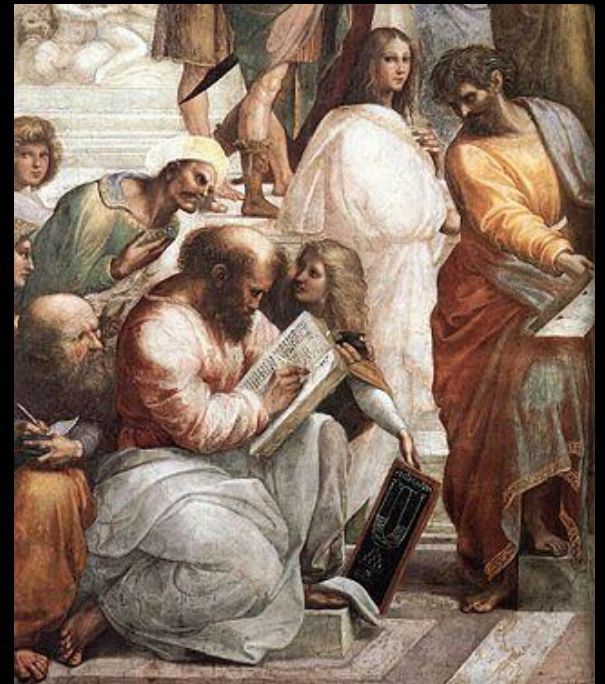
*“Ὑγεία”, Hugieia;
es decir, “salud”*



Algunas ideas de La Hermandad

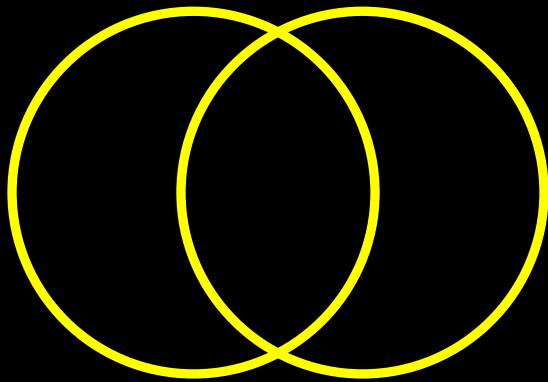
La primera esencia es la naturaleza de los números y proporciones que se extiende a través de todas las cosas. De acuerdo con ellos, todo está armónicamente dispuesto y convenientemente ordenado.

Sabiduría es un conocimiento real que versa sobre lo bello, y que tiene siempre una sustancia inmutable, por cuya participación las demás cosas pueden ser llamadas bellas. Filosofía es la aspiración a tal contemplación.



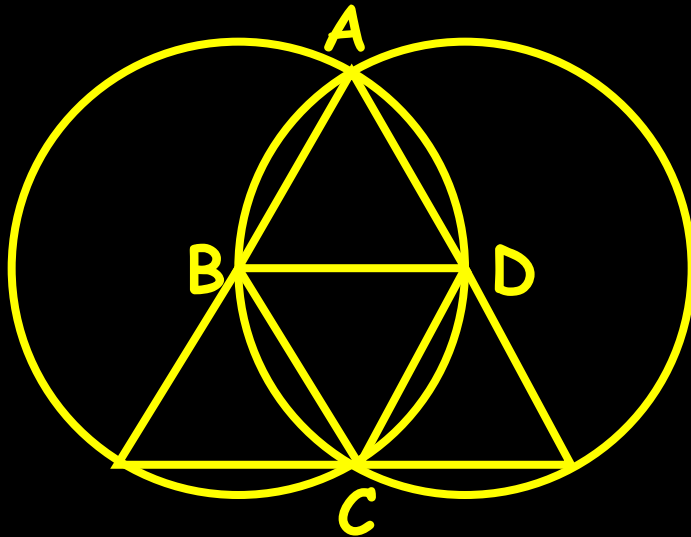
Ah, La hermandad de los pitagóricos... El círculo, el PEZ... Si mal no recuerdo son los primeros números simbólicos de la secta, ¿no es cierto?... El tercero es el triángulo y el cuarto es la Tetraktys.

(Los Crímenes de Oxford, p. 143)



Pez

Vi antes que nada el pez, en posición vertical, un dibujo esquemático en tinta negra, que parecía hecho a partir de dos paréntesis enfrentados. (pág. 89)

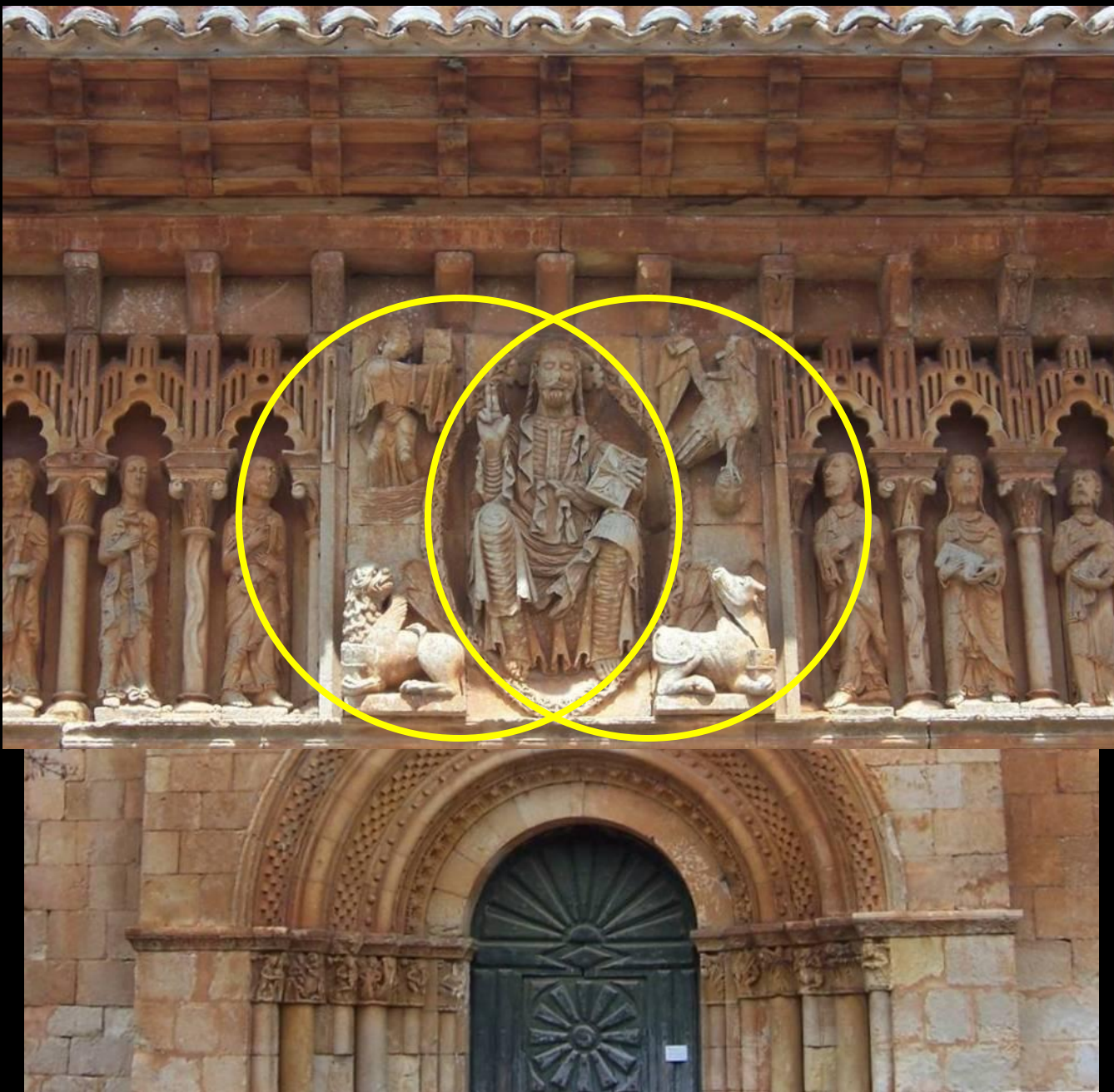


Pez

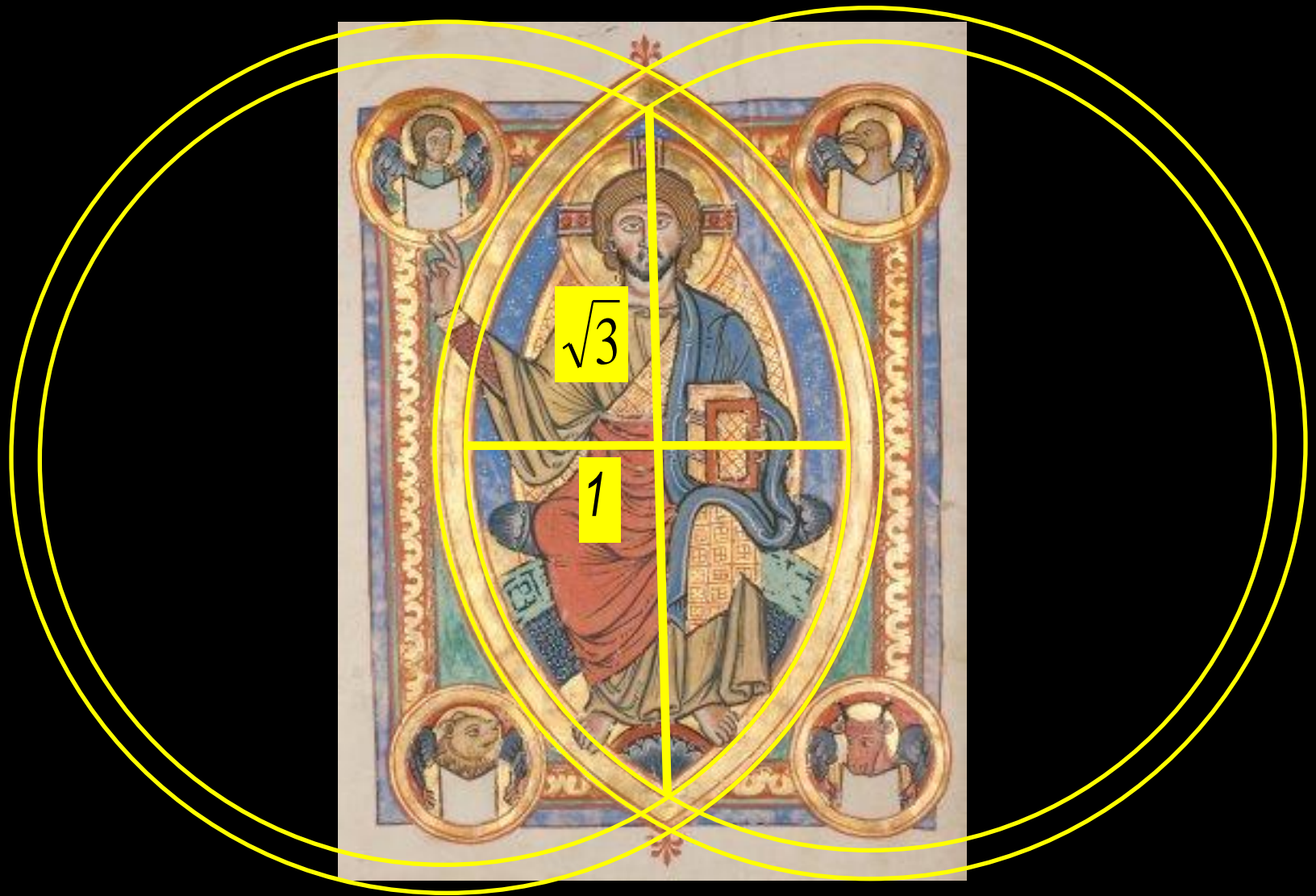
*Vesica piscis
Mandorla*

$$\frac{AC}{BD} = \sqrt{3}$$

PEZ



VESICA PISCIS

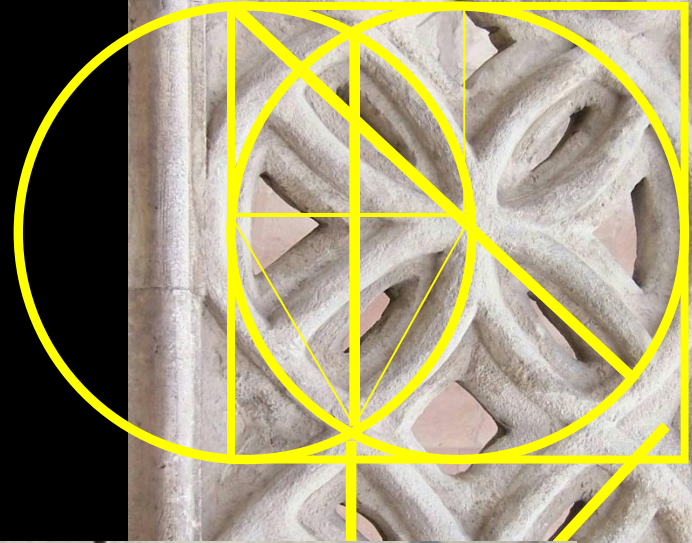


MANDORLA





$\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2}$

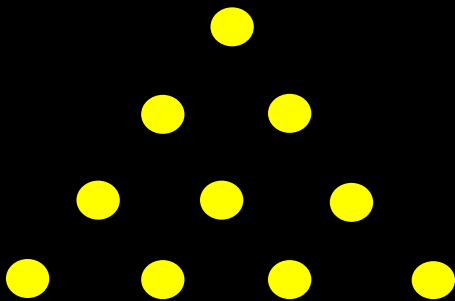


Ah, La hermandad de los pitagóricos... El círculo, el pez... Si mal no recuerdo son los primeros números simbólicos de la secta, ¿no es cierto?... El tercero es el triángulo y el cuarto es la Tetraktys.

(Los Crímenes de Oxford, p. 143)

Tetraktys

Recuerdo que en su charla comparó los puntos de la Tetraktys con la disposición de los bolos al comienzo del juego. (pág. 154)

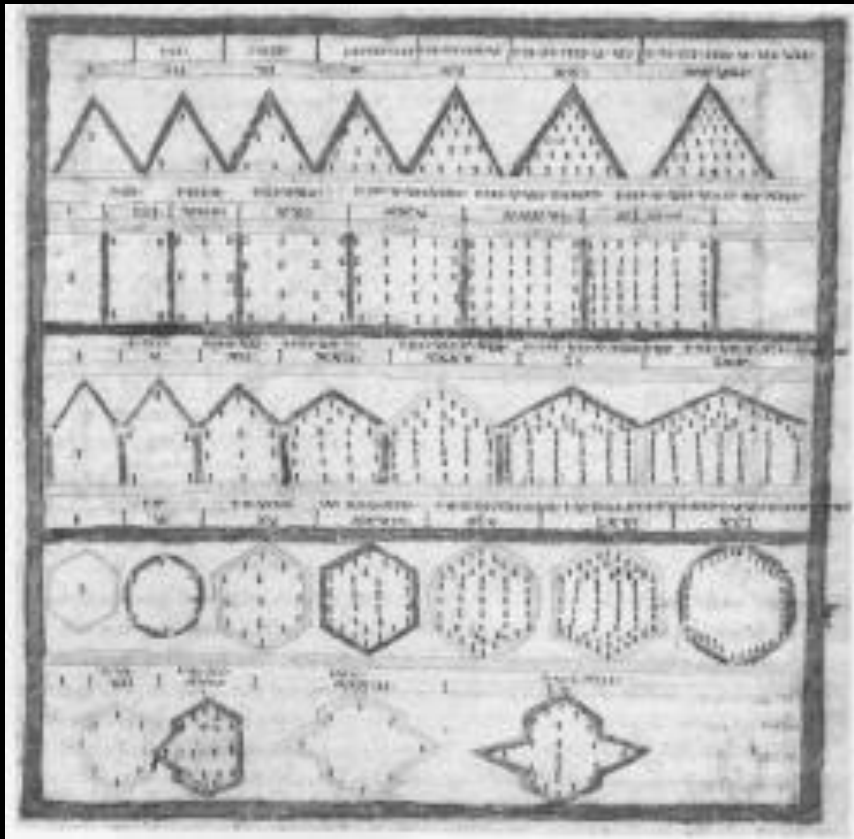




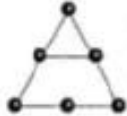
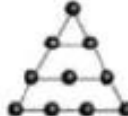
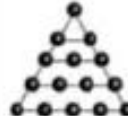

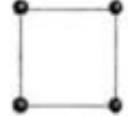
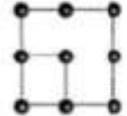
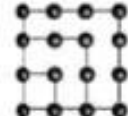
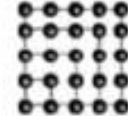









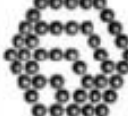
- Suma de los cuatro primeros números naturales: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- Cuarto número triangular: 1, 3, 6, 10, 15....

Plegaria a la Tetraktys:

¡Bendícenos, número divino, tú que has engendrado a los dioses y a los hombres! ¡Oh santa, santa Tetraktys, tú que estás contenida en la raíz y en la fuente del flujo eterno de la creación!

Números poligonales o figurados

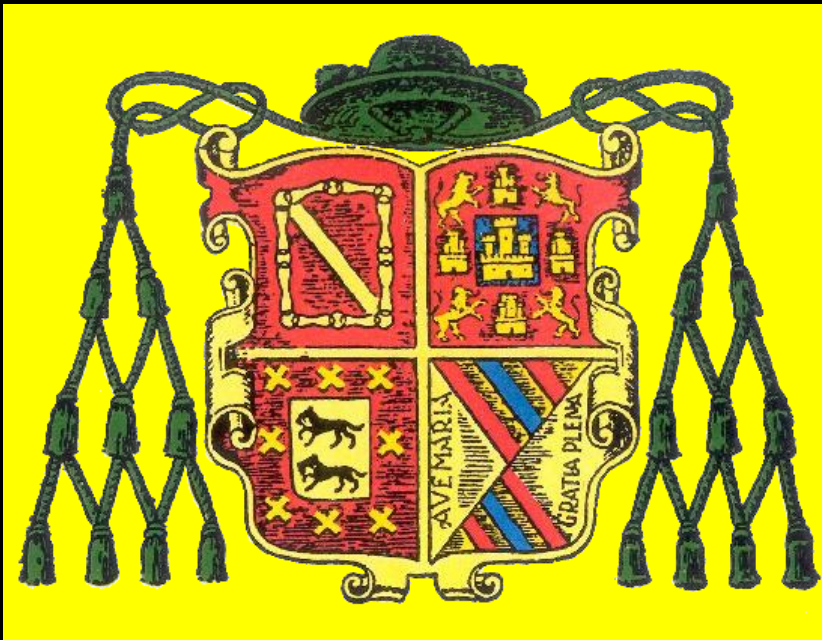


NÚMEROS POLIGONALES	TIPO	ORDEN				
		1	2	3	4	5
	TRIANGULARES					
		1	3	6	10	15
	CUADRADOS					
		1	4	9	16	25
	PENTAGONALES					
		1	5	12	22	35
	HEXAGONALES					
		1	6	15	28	45

Representación de los número triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

Números poliedrales

Cardenal Iñigo López de Mendoza



SIMETRÍA

SYMMETRÍA

SYMMETRÍA

συμμετρία

συμ=con

μετρ=medida

ία=cualidad

SYMMETRÍA

PRINCIPIOS DEL SIGLO V a.C.

Concordancia o semejanza entre dos objetos.

MEDIADOS DEL SIGLO V Y PRINCIPIOS DEL IV a.C.

- Proporción adecuada
- Relación de las partes de una obra con el todo
- Relación expresada en términos de fracciones (razón) y que necesita de un cálculo aritmético

.....La simetría tiene su origen en la proporción, que en griego se denomina analogía. La proporción se define como la conveniencia de medidas a partir de un módulo constante y calculado y la correspondencia de los miembros o partes de una obra y de toda la obra en su conjunto.

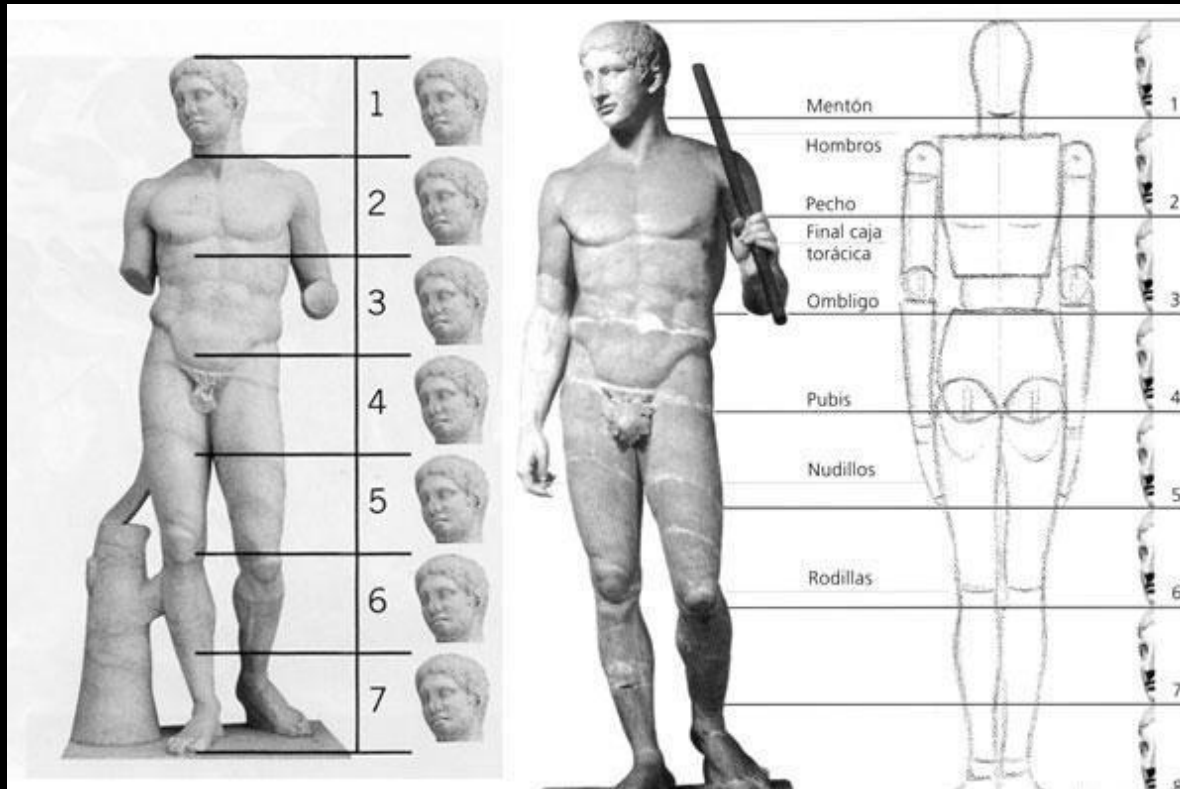
Vitruvio:
De Architectura

Principio de Analogía del Maestro (Pitágoras):

Conocerás, hasta allí donde le sea posible a un mortal, que la naturaleza es en todo parecida a sí misma

Platón:
VII Carta

Ejemplo de módulo



Proporciones preferidas de los pitagóricos:

Proporción Universal: 6, 8, 9, 12

$12-9=9-6$ Proporción aritmética

$\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$ Proporción geométrica

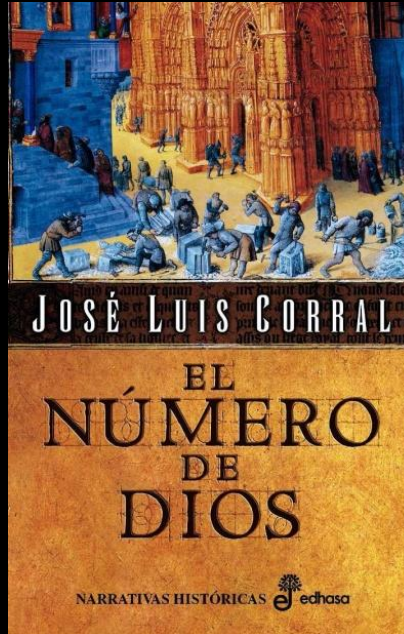
Intervalos de la gama musical pitagórica:

12 Mi_1 ; $9/8$ La ; $12/6=2$ La Octava Mi_1 , M_2 , etc.

Proporción Áurea o Divina Proporción

EL NÚMERO DE DIOS

JOSÉ LUIS CORRAL



ARGUMENTO

MATEMÁTICAS

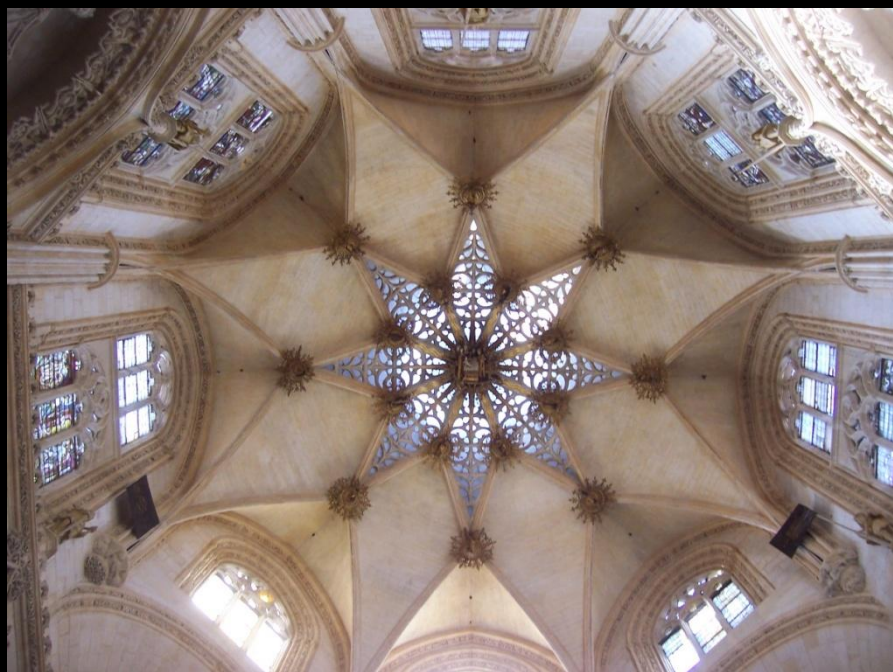
A partir del cuadrado, del triángulo equilátero y de la proporción áurea, el número de Dios, construir un edificio se convertía en un ejercicio matemático basado en los números, en la geometría y en la simbología divina.



(pág. 365)

Esta catedral es un teorema, sólo un teorema que ha sido elegantemente resuelto: geometría y matemáticas, nada más.

(pág. 485)



Capilla de los Condestables



*Capilla de la Presentación
y la Consolación (S. José)*

Hemos conseguido que en la nueva catedral se refleje la proporción matemática del número de Dios, lo que significa copiar la proporción numérica con la que Dios, el gran arquitecto, construyó el universo.

(pág 365)



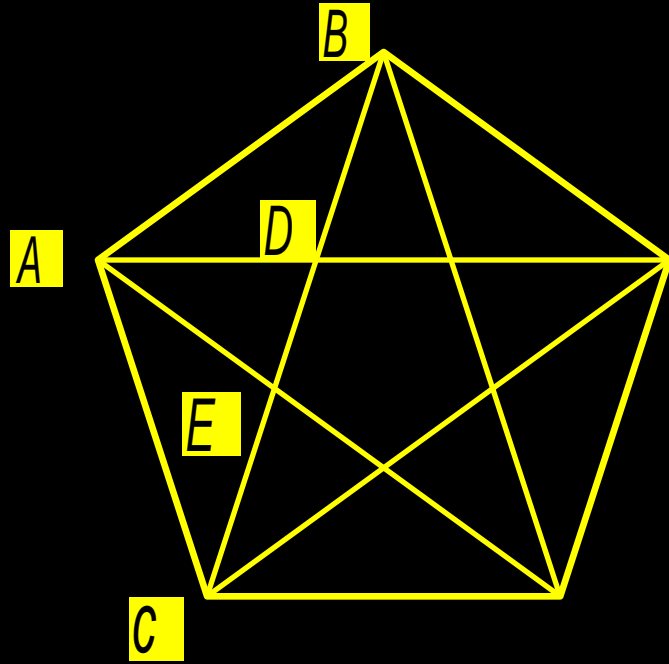
Cimborrio

Ese es el secreto de esta catedral: está construida siguiendo las proporciones del número áureo, el que Dios eligió para construir el universo...

(pág. 134)



NÚMERO ÁUREO o DIVINA PROPORCIÓN



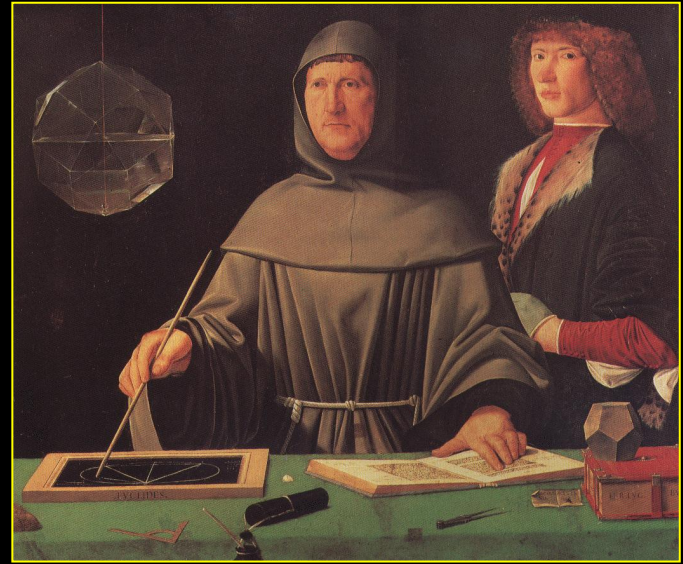
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DE} = \phi$$

LUCA PACIOLI (1445-1517)

Obra para todo ingenio perspicaz y curioso, necesaria e imprescindible para el estudioso de la Filosofía, Perspectiva, Pintura, Escultura, Arquitectura, Música y también Matemática.

Suavísima, sutil y admirable doctrina, adornada con varias cuestiones de secretísima ciencia.



proportione
Opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria. Que cia
scun studioso di **P**hilosophia:
Prospectiva **P**ictura **S**culptura:
Architectura: **M**usica: e
altre **M**athematiche: sua
uissima: sottile: e ad
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi: cova
rie questione
de secretissi
ma scien
tia.

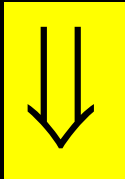
M. Antonio Capella eruditiss. recensentes:
A. Paganus Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

*La Divina Proporción
Acabada el 14 de
diciembre de 1497
Publicada
en junio de 1509*

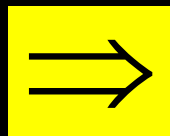
RECTÁNGULO ÁUREO

“La belleza ... está en la proporción.” (pág 207)

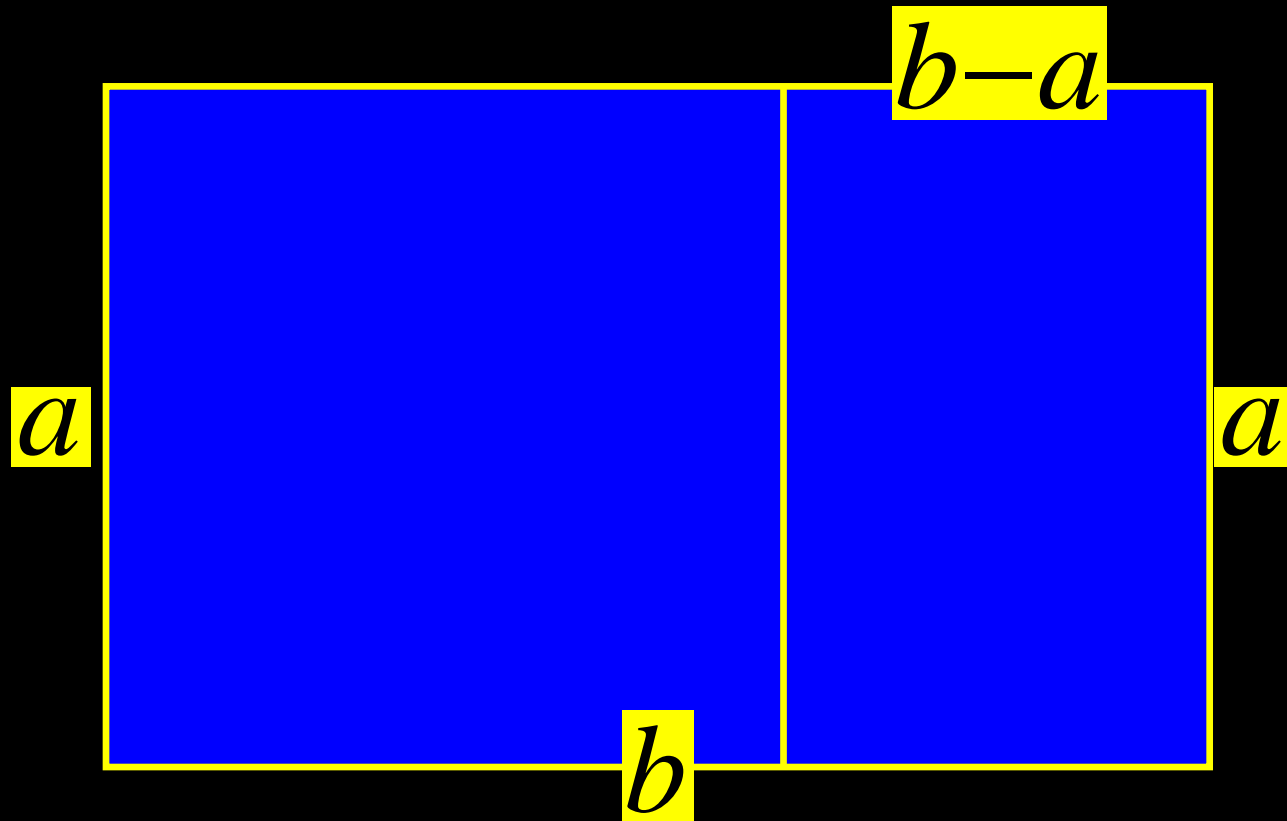
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$



$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

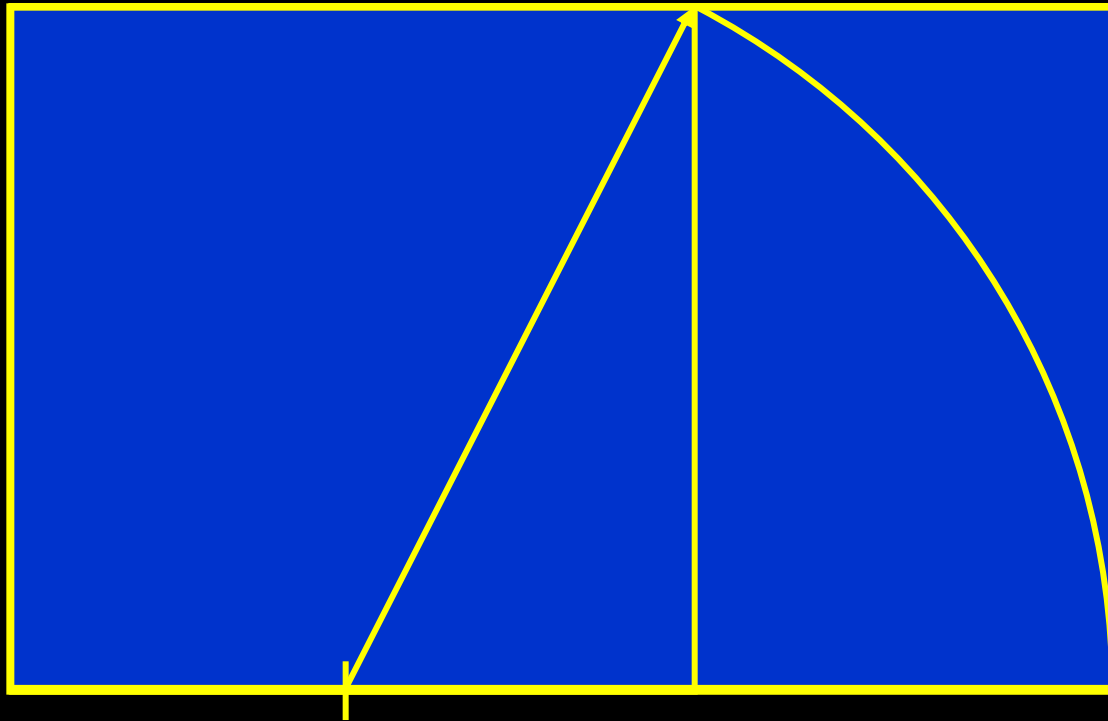


$$b = a \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$



CONSTRUCCIÓN DEL RECTÁNGULO ÁUREO

Geometría Sagrada



PROPIEDADES ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA:

$$\phi^2 = \phi + 1$$

 \Rightarrow

$$\phi^3 = \phi^2 + \phi$$

 \Rightarrow

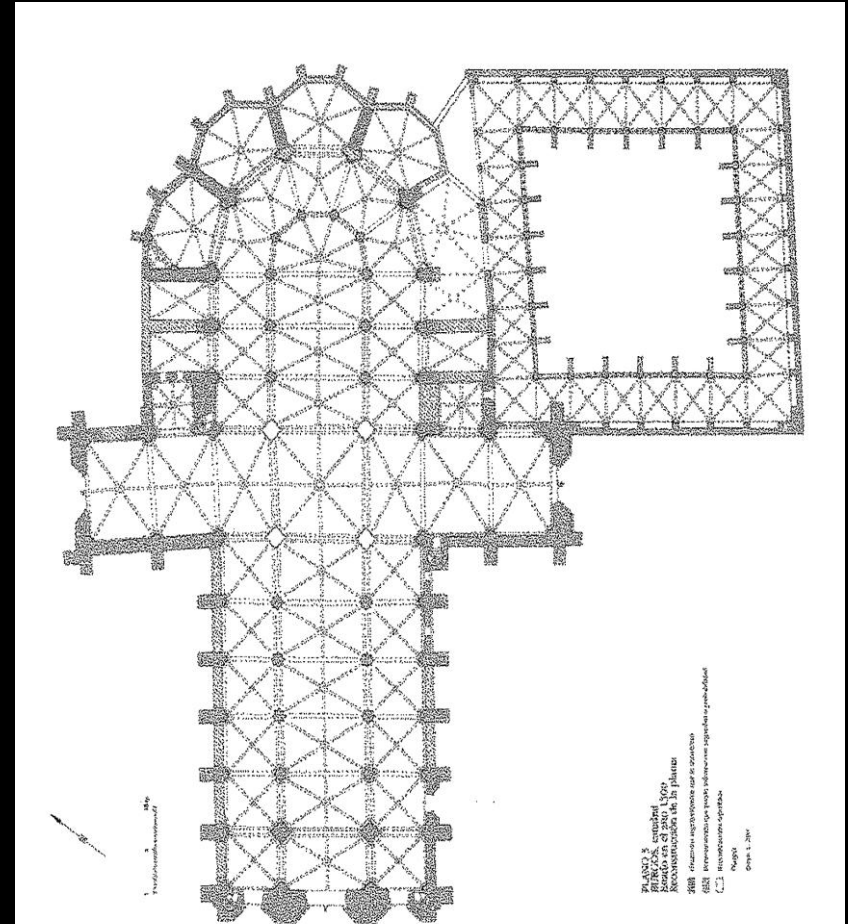
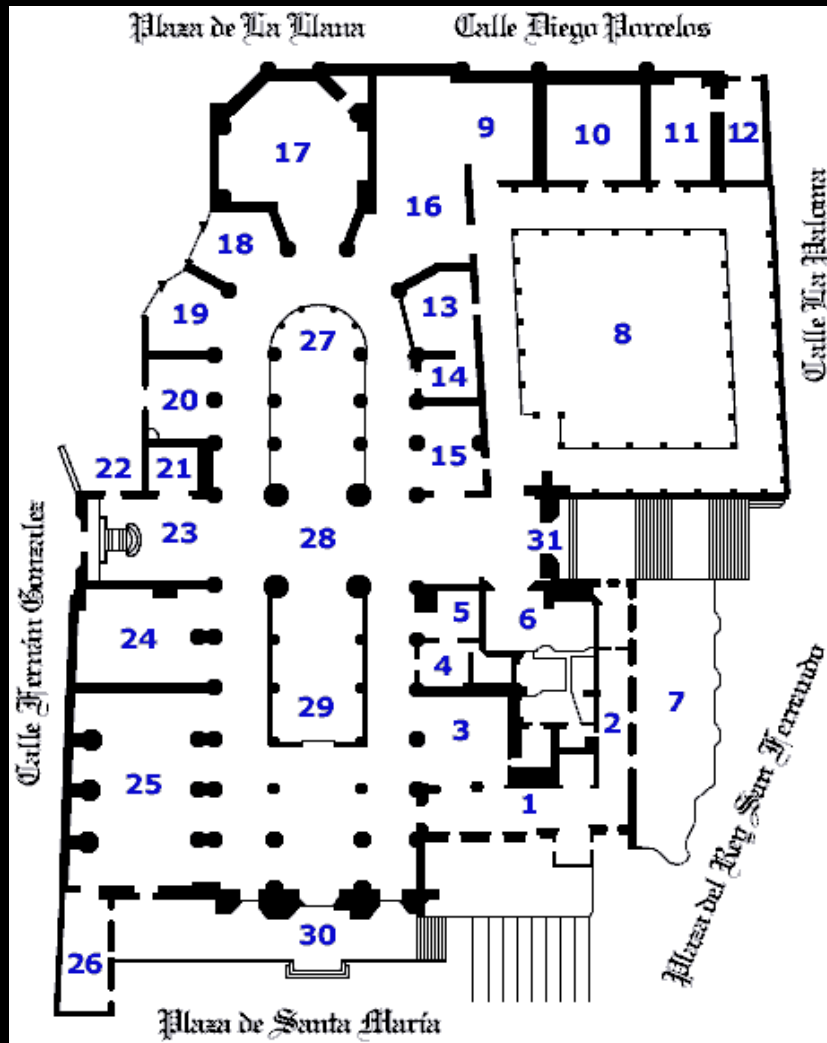
$$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2, \dots$$

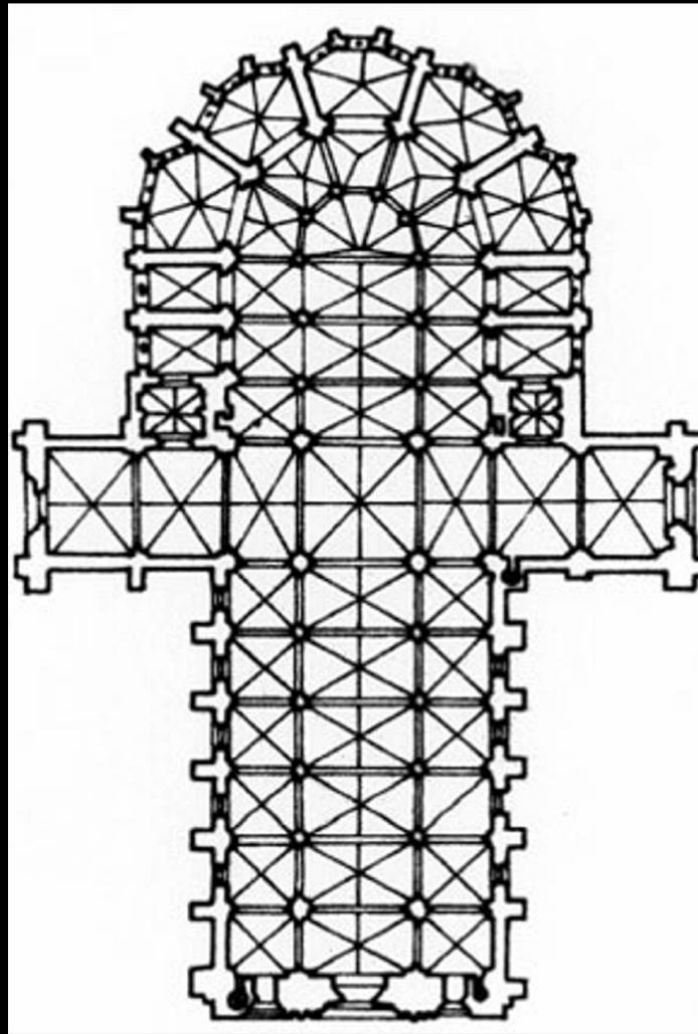
$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$$

- ~~ϕ~~ ~~ϕ^2~~ ~~ϕ^3~~ ~~ϕ^4~~ ~~ϕ^5~~ ~~ϕ^6~~ ~~ϕ^7~~ ~~ϕ^8~~ ~~ϕ^9~~ ~~ϕ^{10}~~

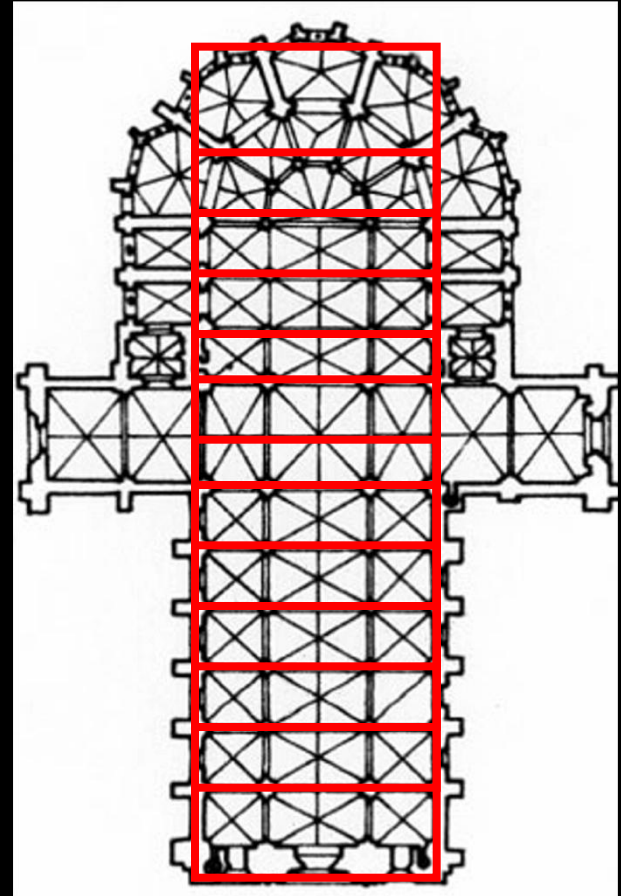
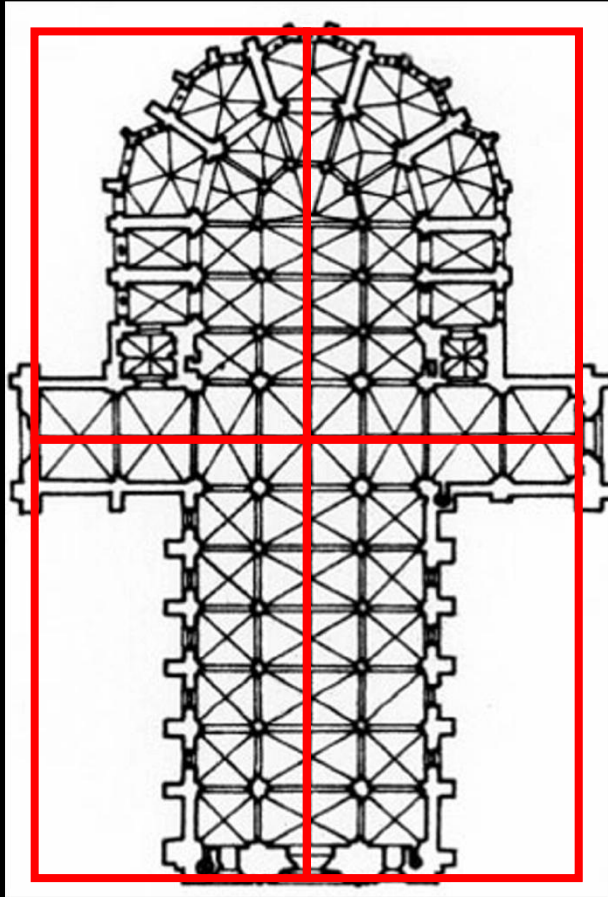
Forma armoniosa de variación o crecimiento

PROPORCIÓN ÁUREA EN LA CATEDRAL DE BURGOS

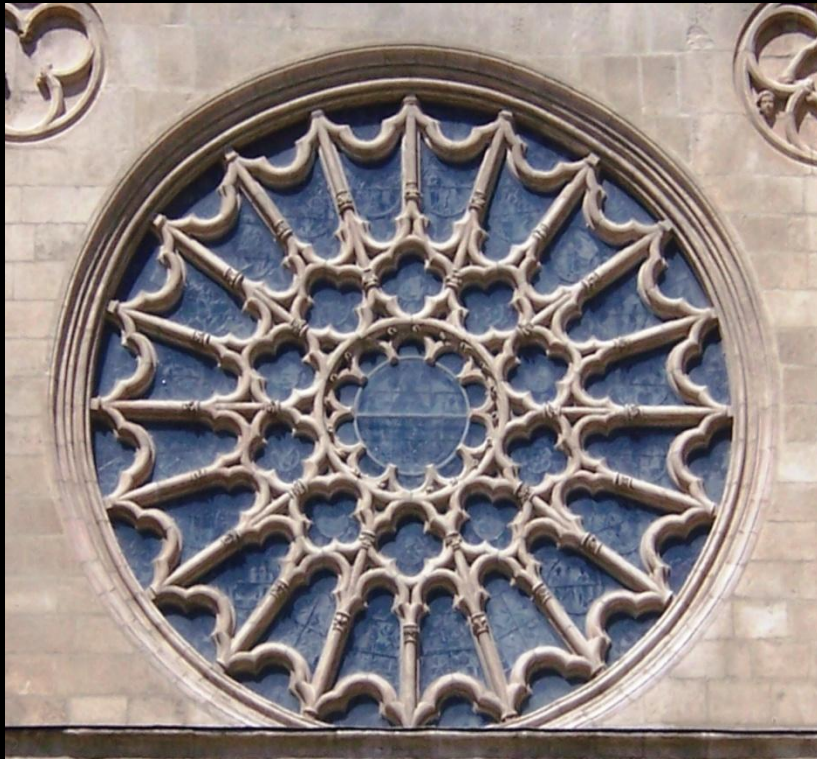




RECTÁNGULOS ÁUREOS

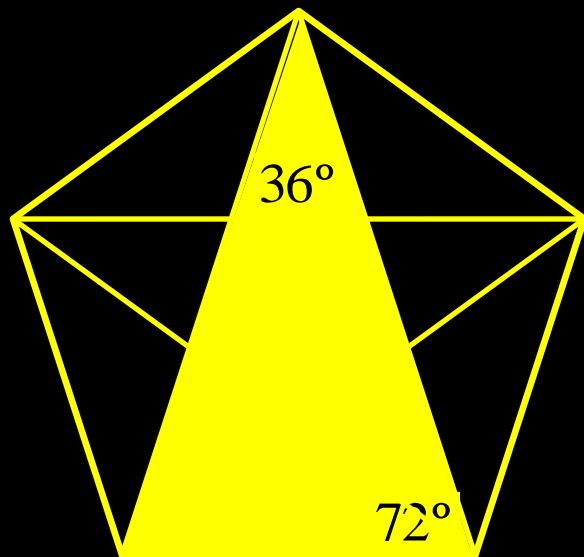


LA DIVINA PROPORCIÓN Y EL ROSETÓN DEL SARMENTAL



Enrique quiso destacar el gran rosetón de la fachada sur, de ahí que lo convirtiera en un elemento casi exento, rodeado tan sólo por sillares carentes de cualquier decoración. A finales de 1235 ordenó que se comenzaran a esculpir las piezas de la trama de piedra del rosetón del Sarmental... (pág 257)

TRIÁNGULO ÁUREO...

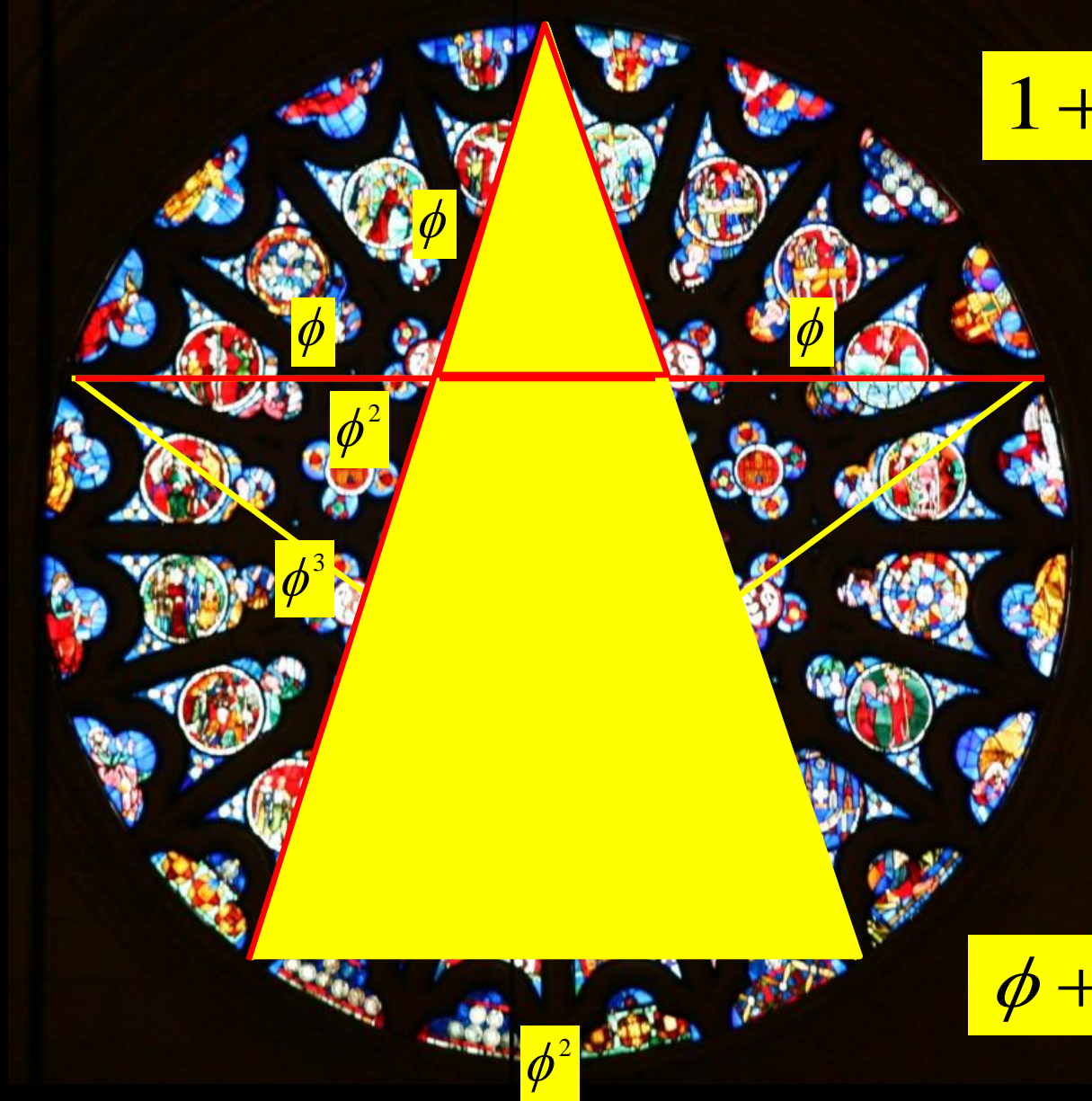


ϕ

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1

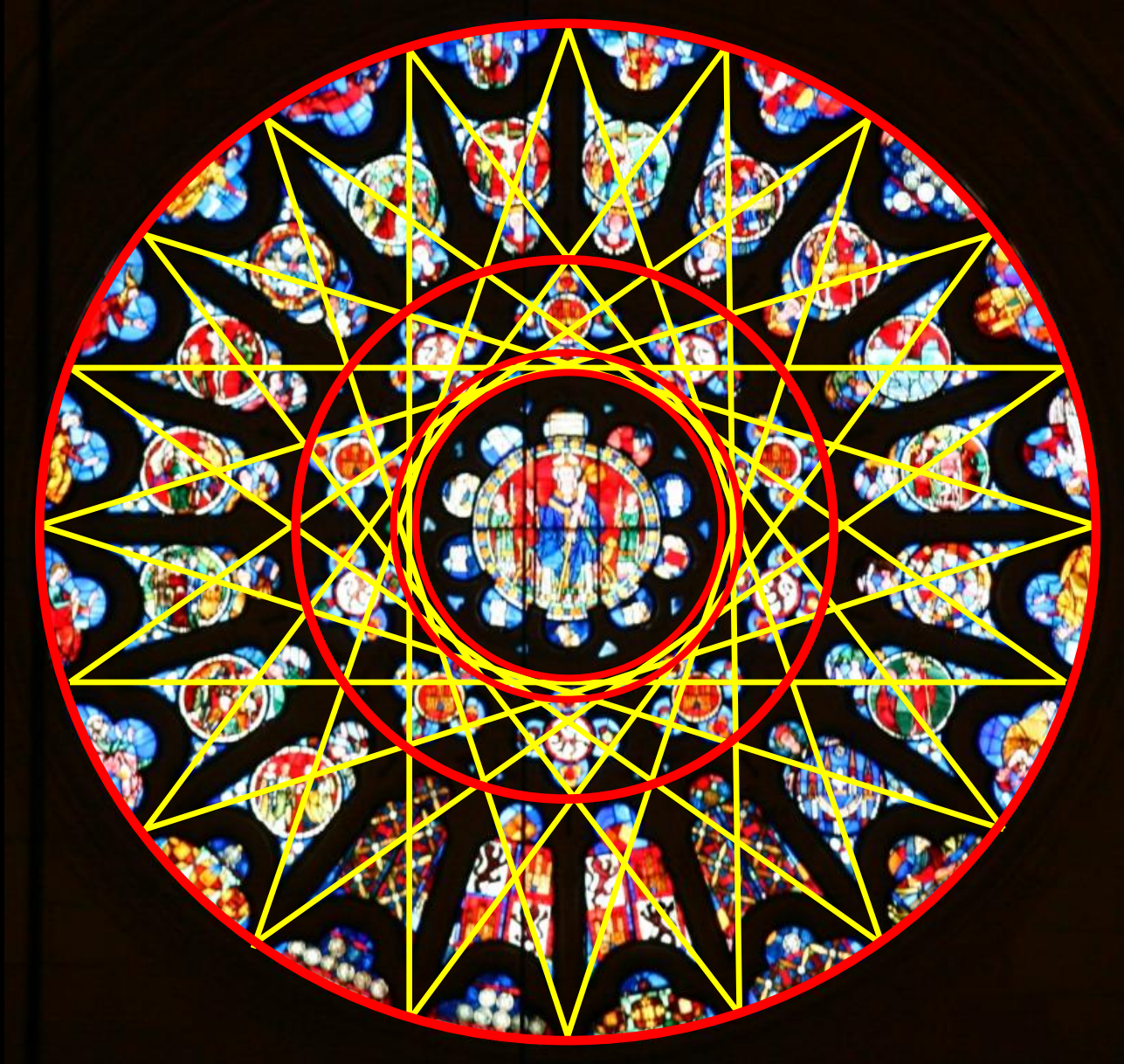
POTENCIAS SUCESIVAS DE ϕ

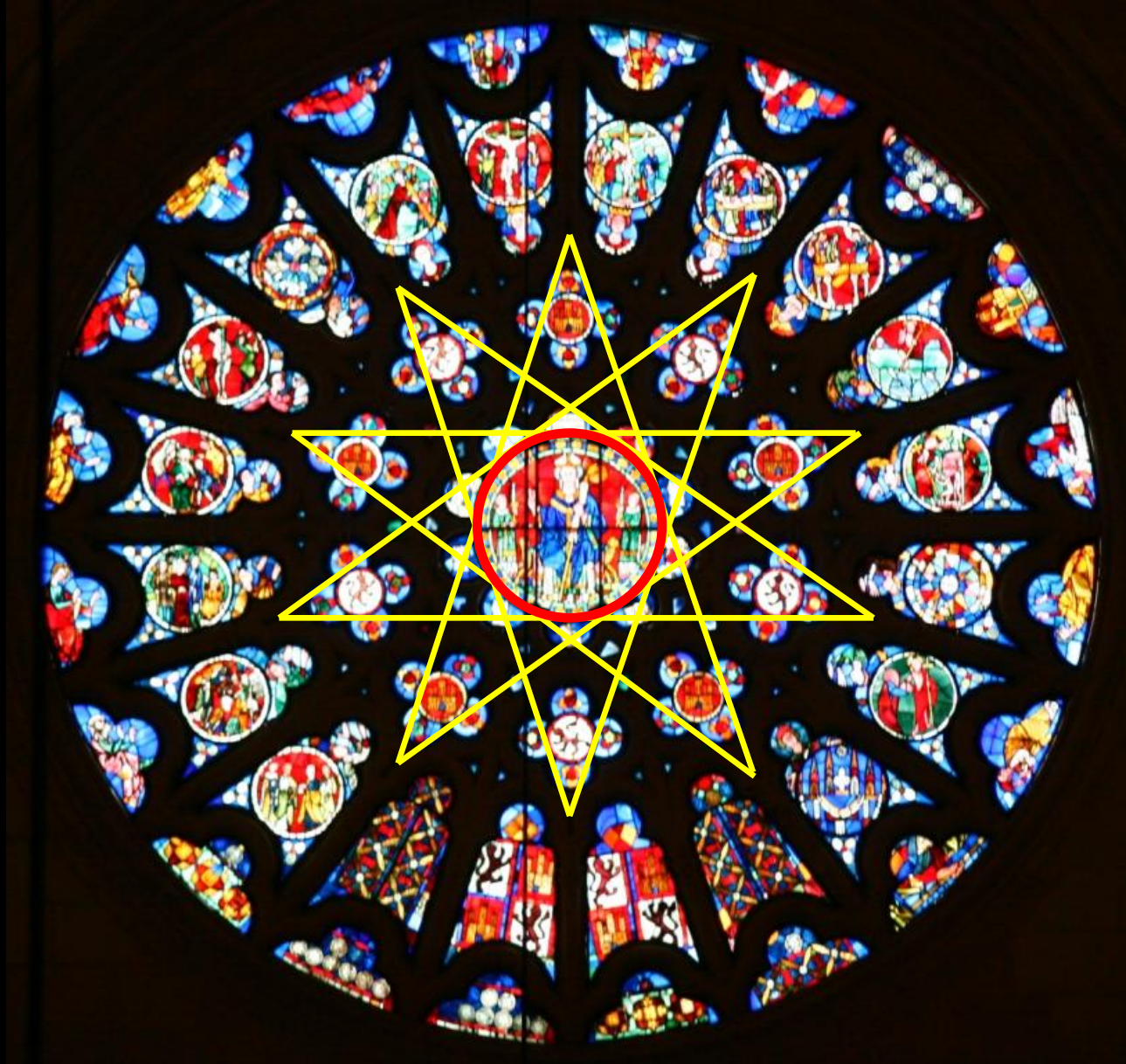


$$1 + \phi = \phi^2$$

$$\phi + \phi^2 = \phi^3$$

CIRCUNFERENCIAS

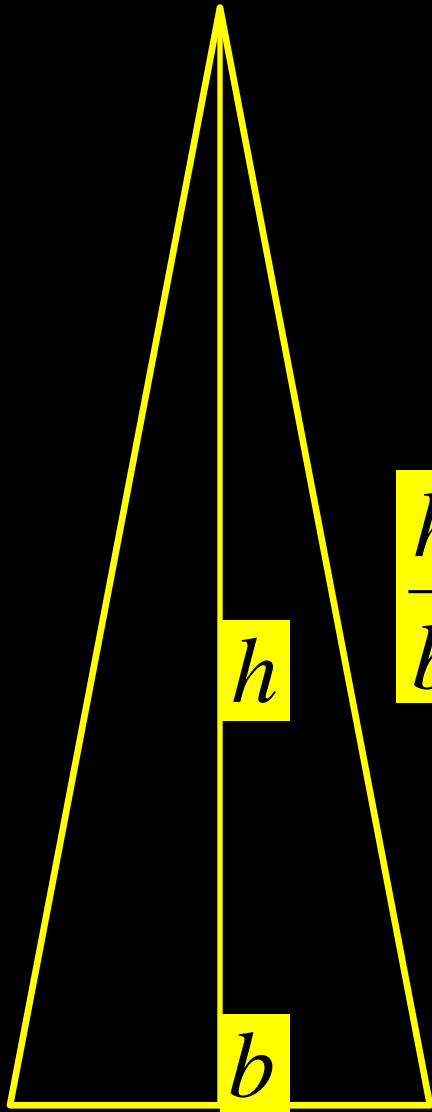




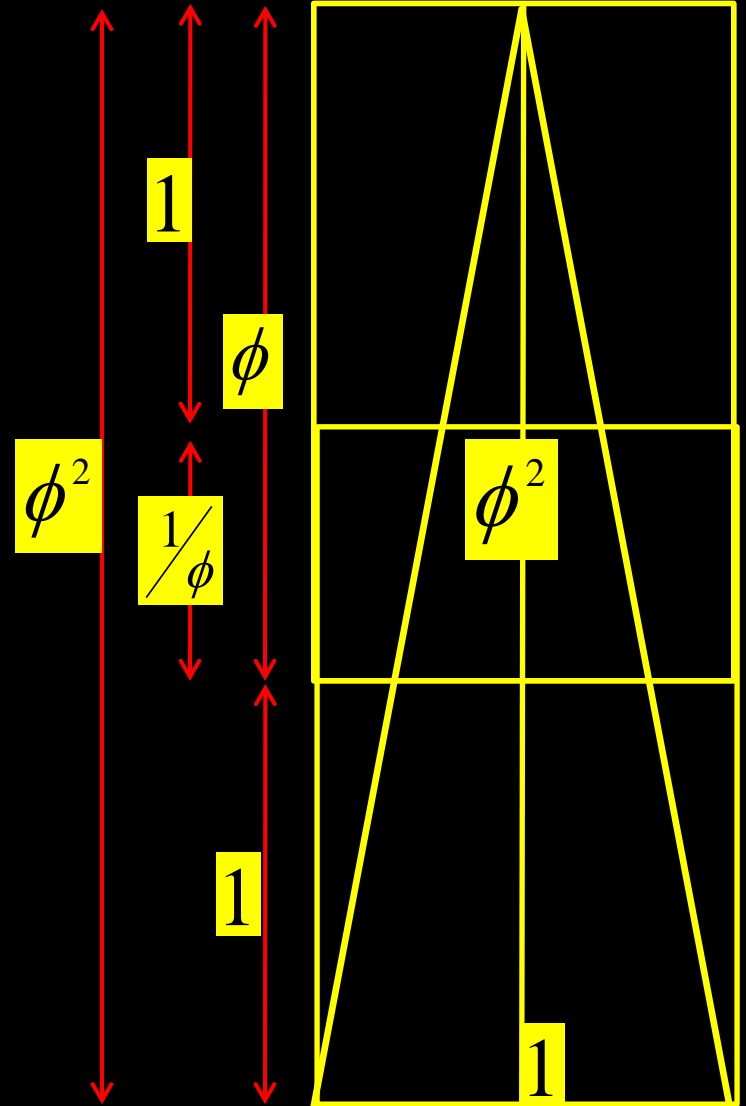
LA DIVINA PROPORCIÓN Y LAS AGUJAS (CHAPITELES)

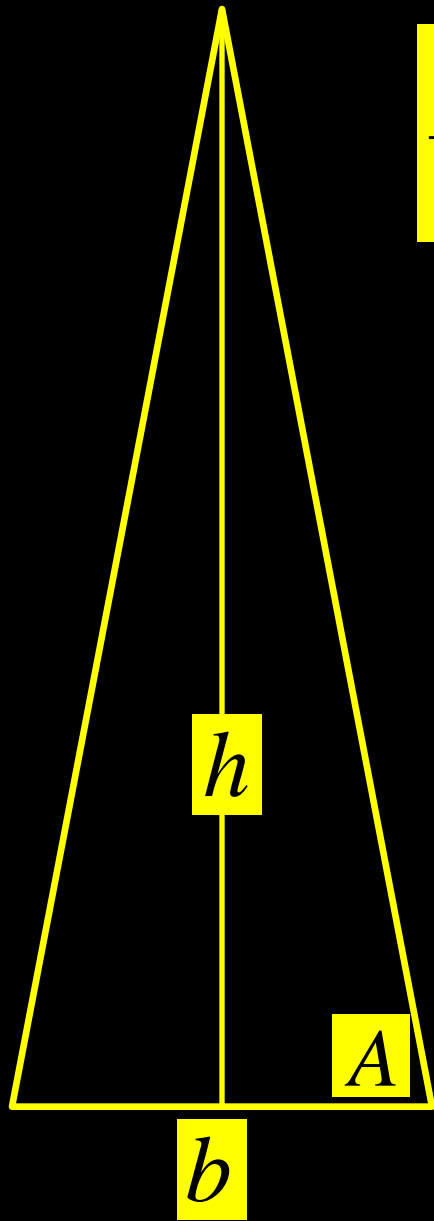


TRIÁNGULO DORADO



$$\frac{h}{b} = \phi^2$$





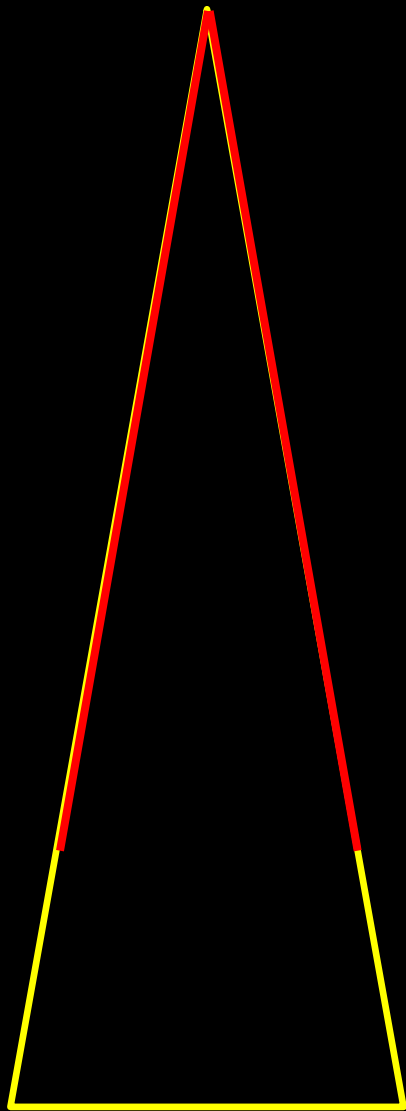
$$\frac{h}{b} = \phi^2$$

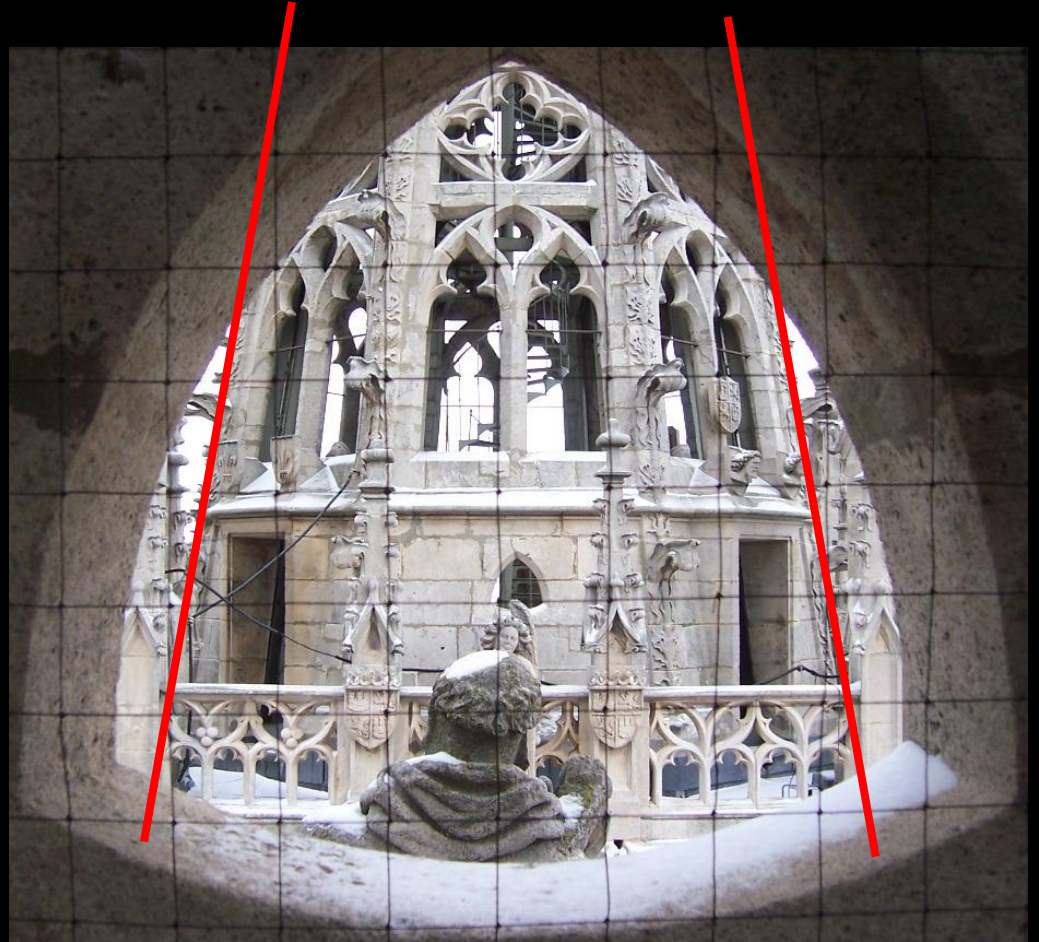
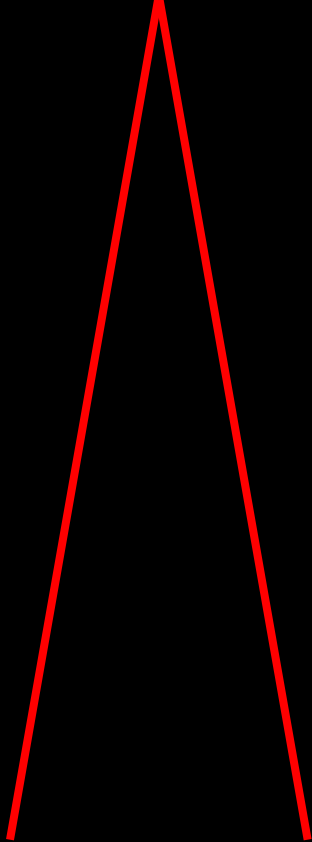
$$\operatorname{tg} A = \frac{h}{b/2} = \frac{2h}{b} = 2\phi^2$$

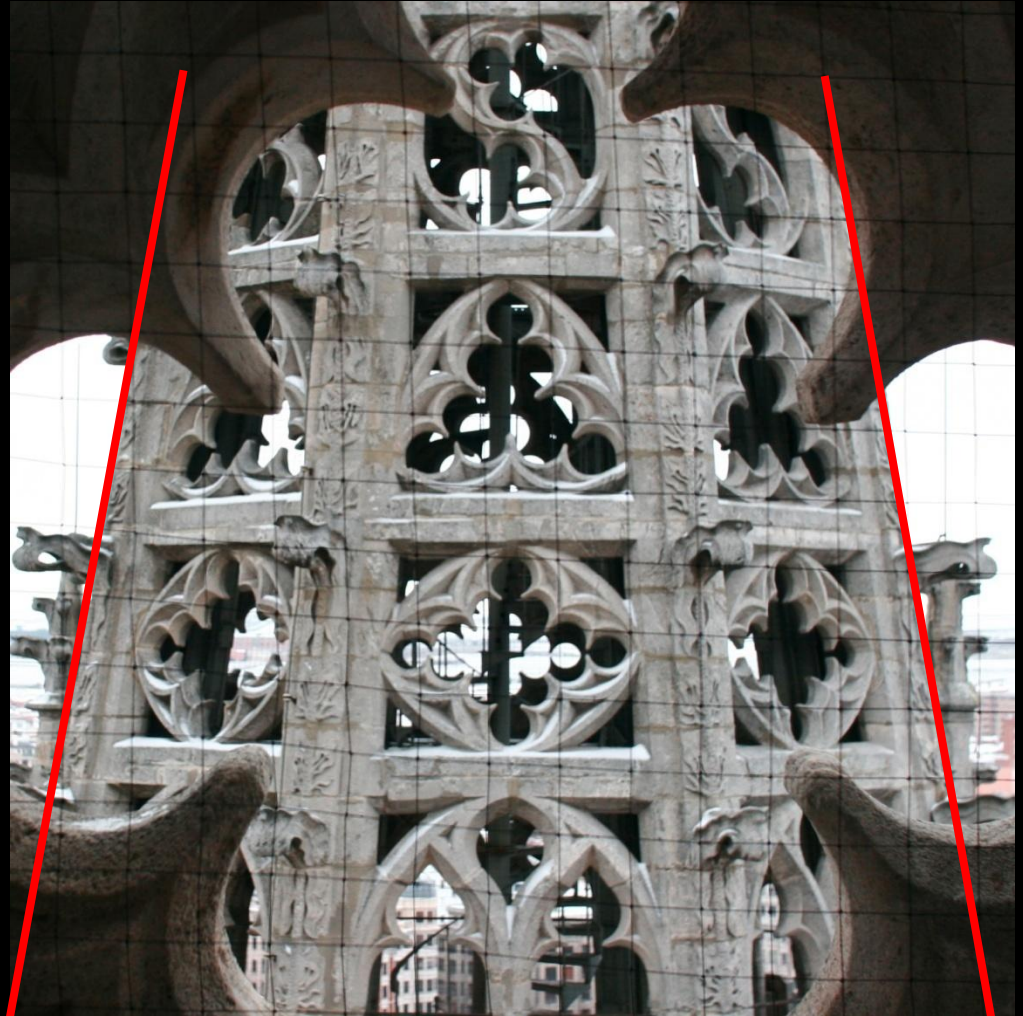
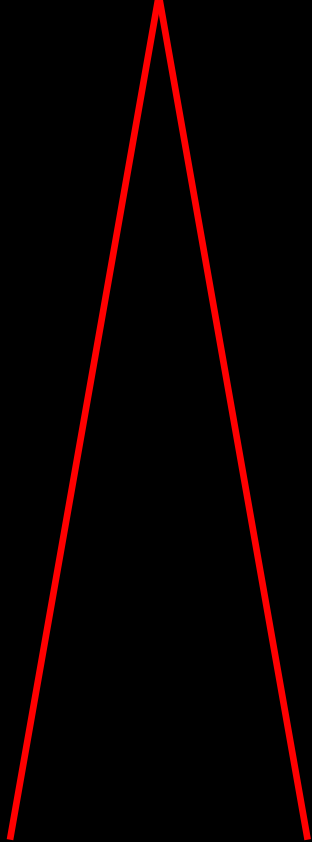
$$\operatorname{tg} A = 2\phi^2 = 5,236067978$$

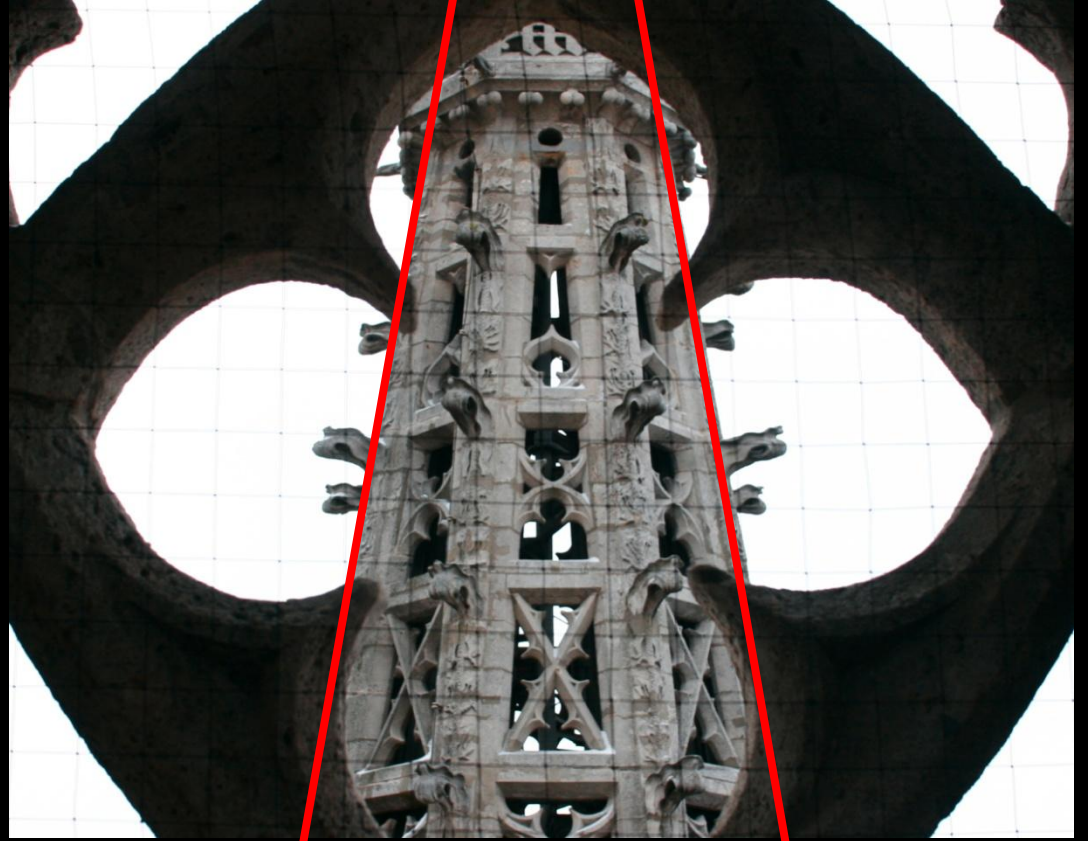
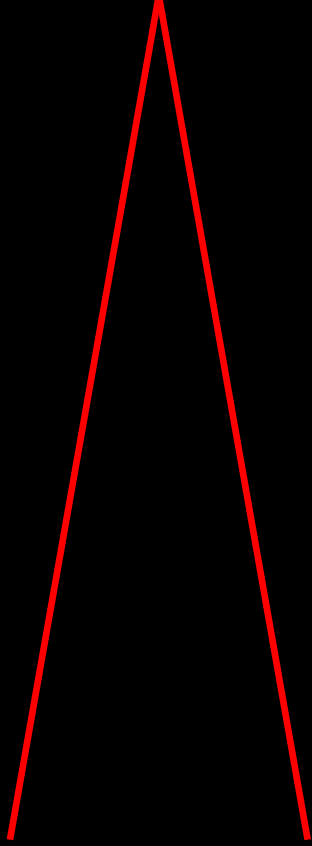
$$A = \operatorname{arctg}(2\phi^2) = 79,18768303$$

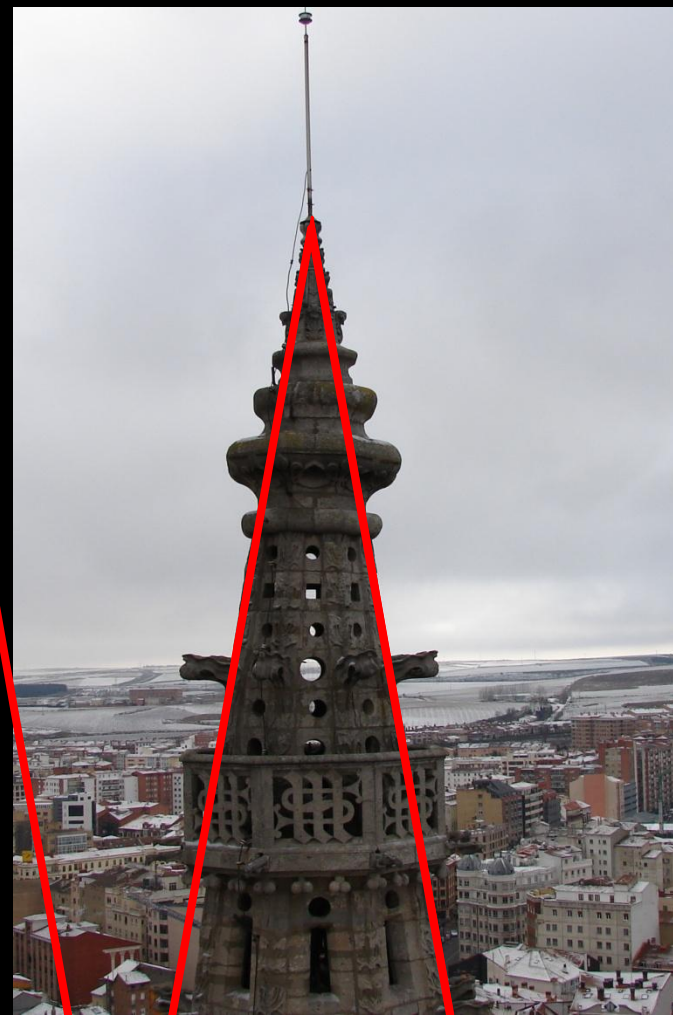
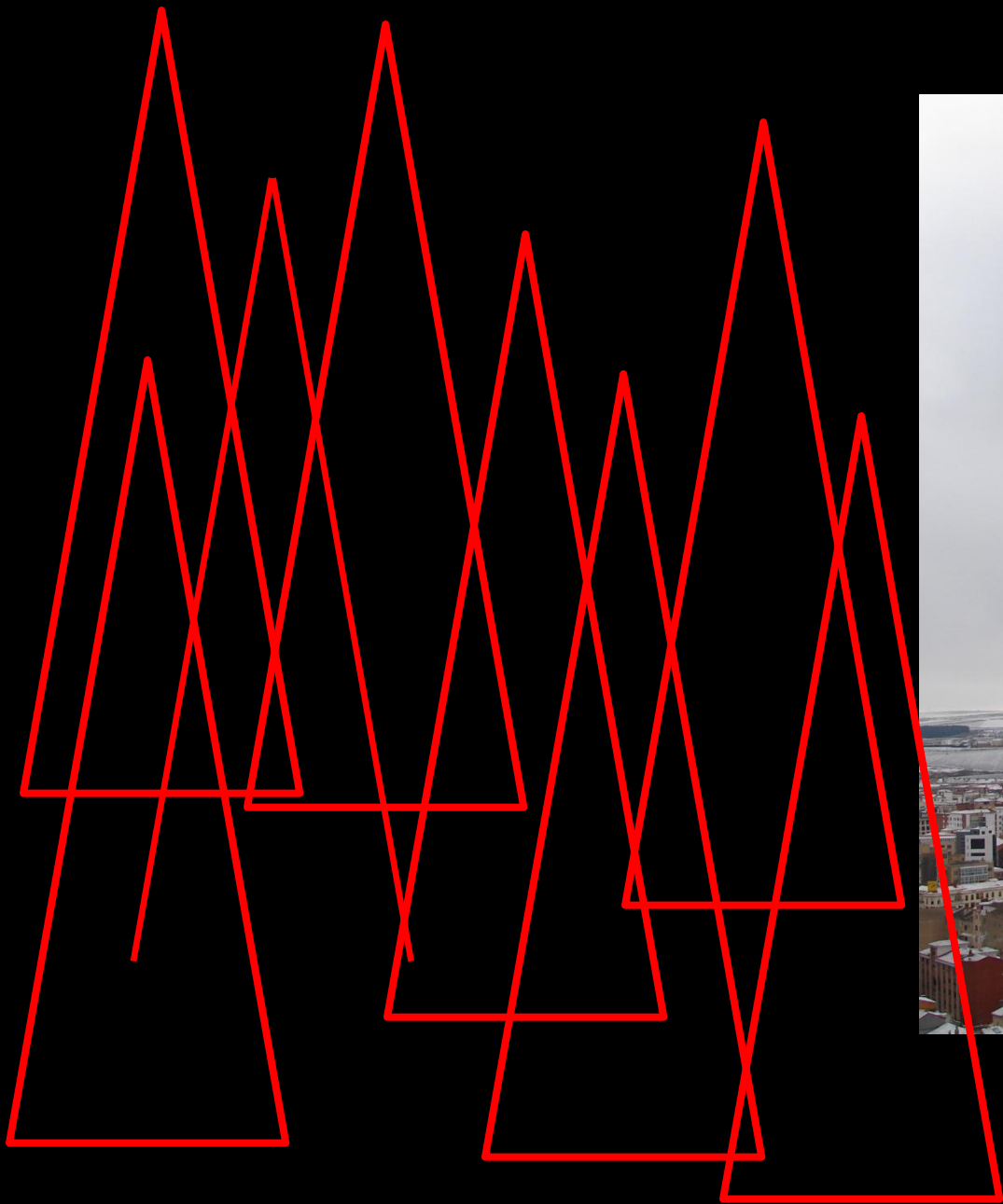
$$A \cong 79,19^\circ$$











ARMONÍA

ΑΡΜΟΝΙΑ

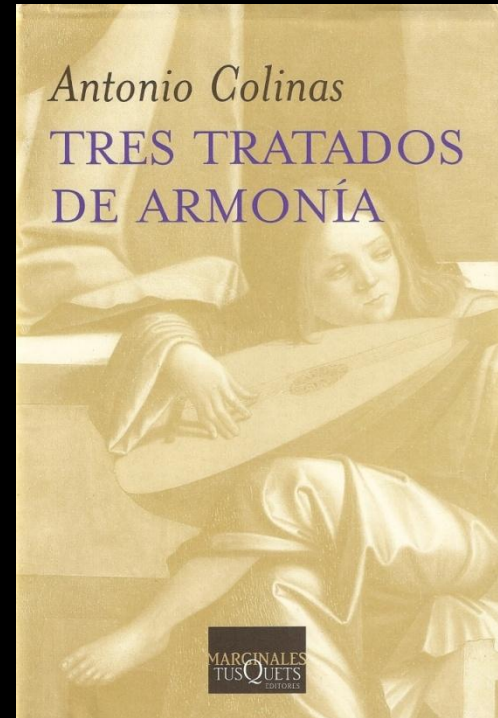
αρμονία armonía

αρμος= armós= juntar

Juntar una cosa con otra en un orden placentero

*... pasan los tiempos y las culturas,
pasan los seres humanos y cambian
las ideas que se impusieron como
definitivas, a veces con leyes crueles,
pero lo que siempre permanece es ese
ritmo o fluir que todo lo rige. Fundir,
en nuestro presente, ese fluir del
mundo con nuestro propio fluir es la
armonía.*

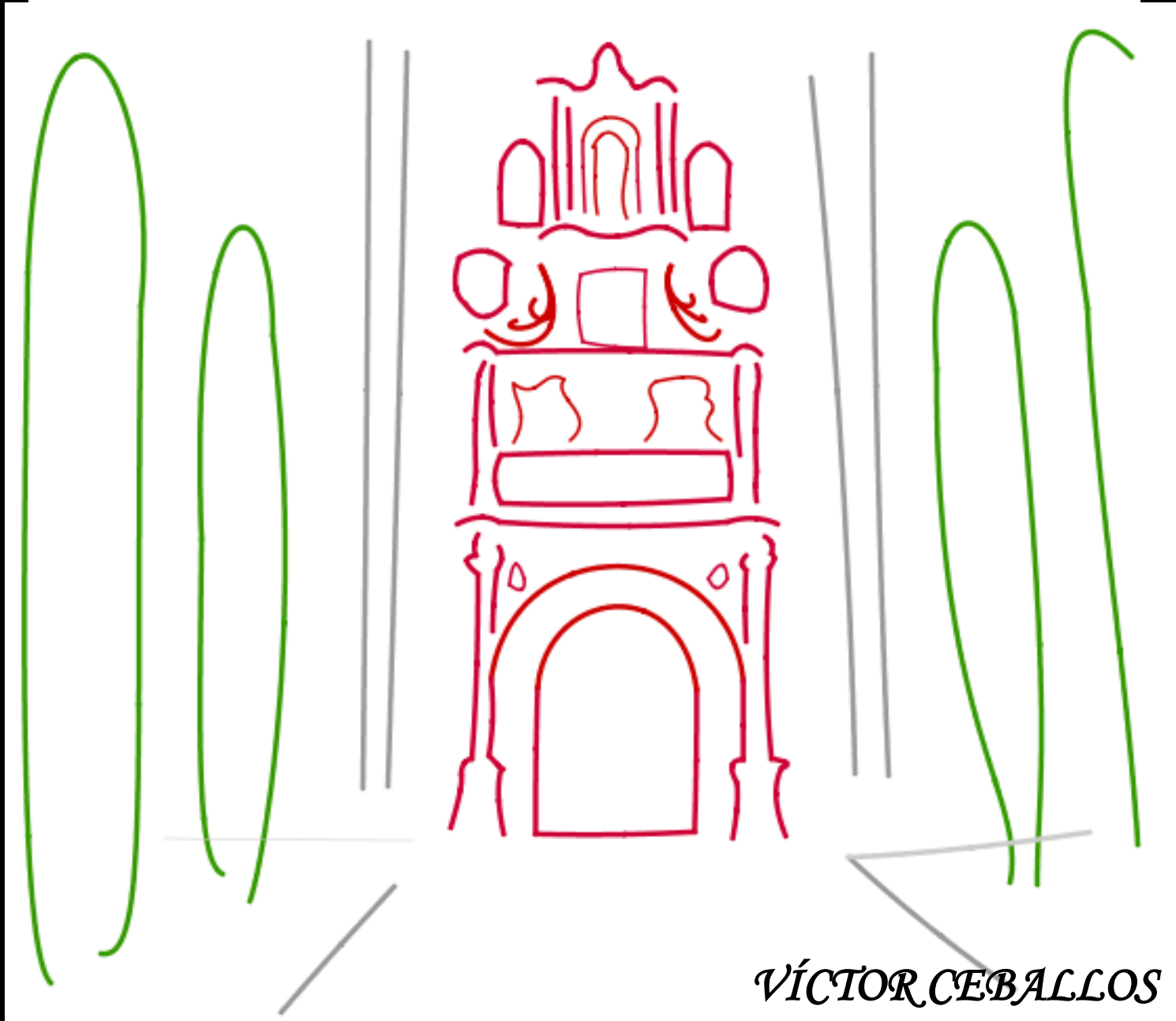
Antonio Colinas:
Tres Tratados de Armonía



ARMONÍA ENTRE EL BOSQUE PÉTREO...



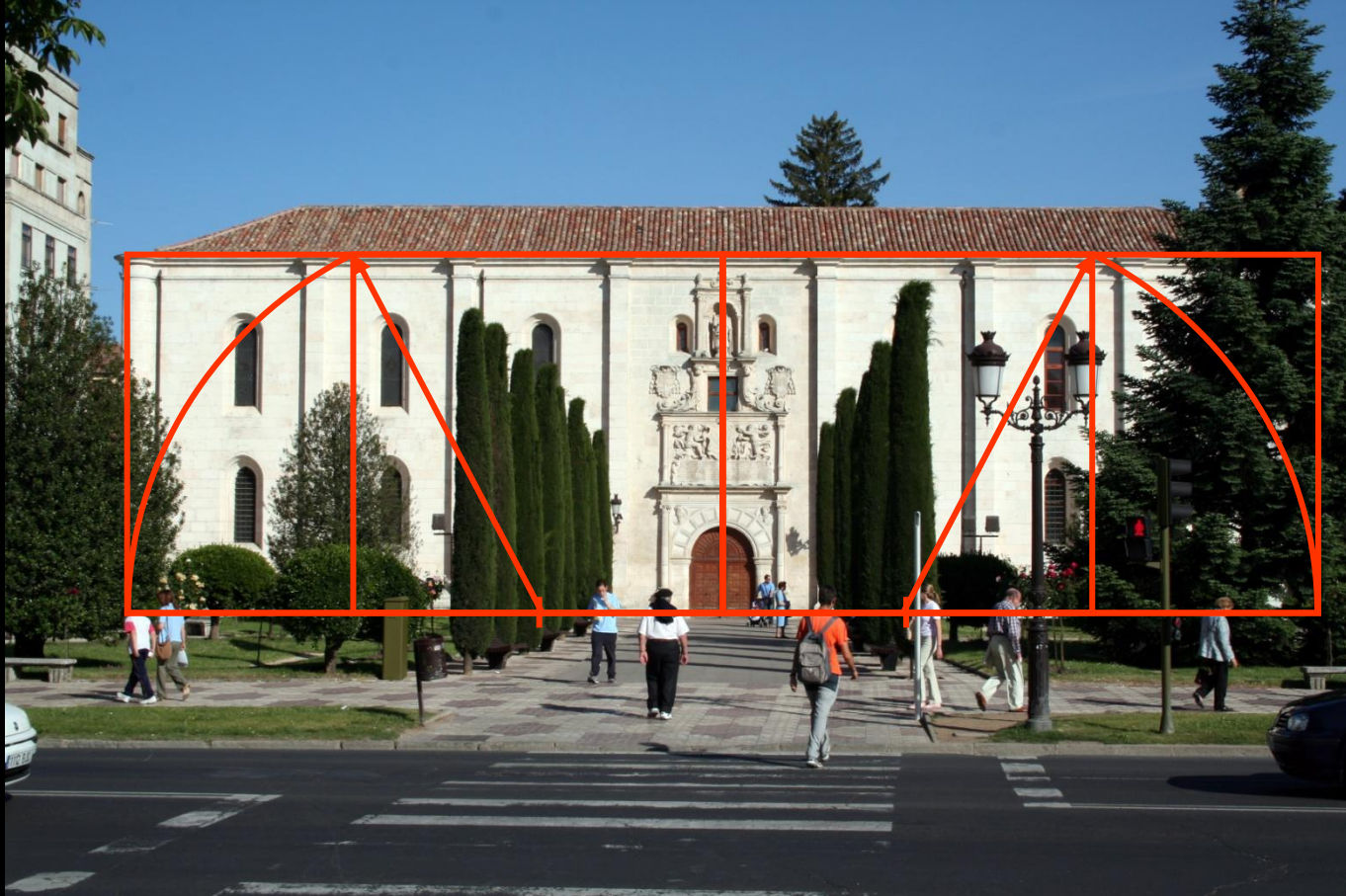
... Y EL INSTITUTO

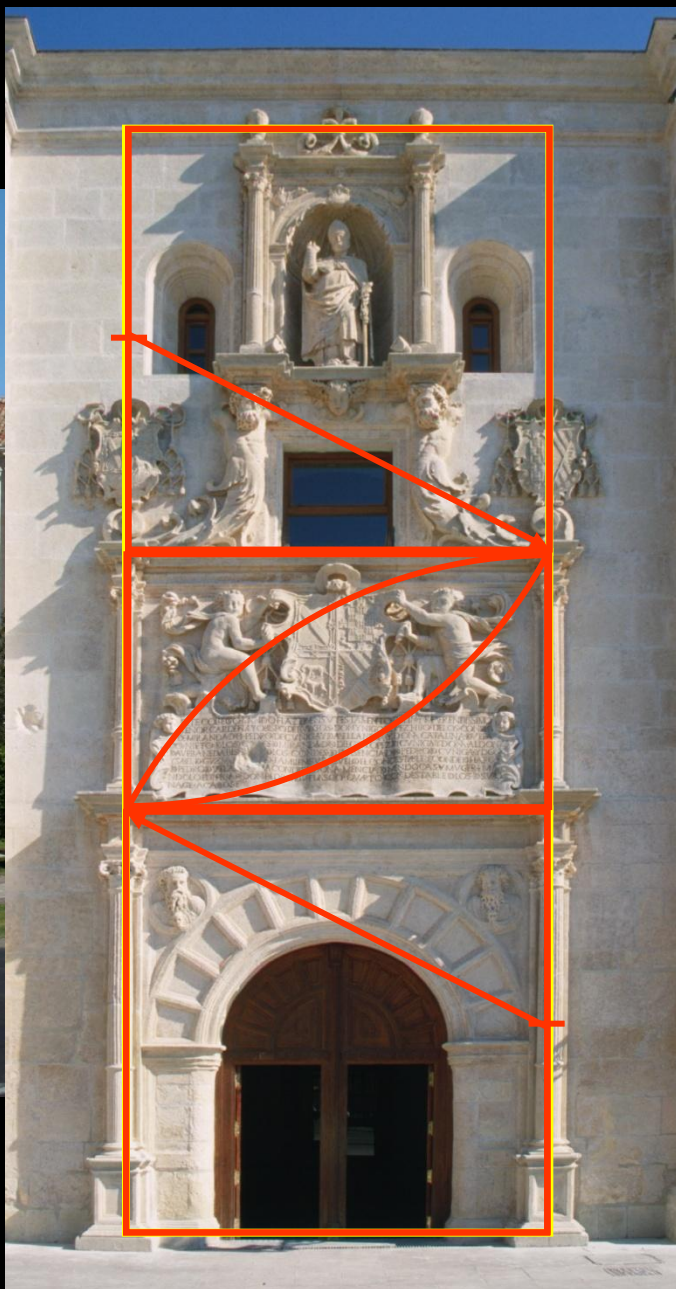


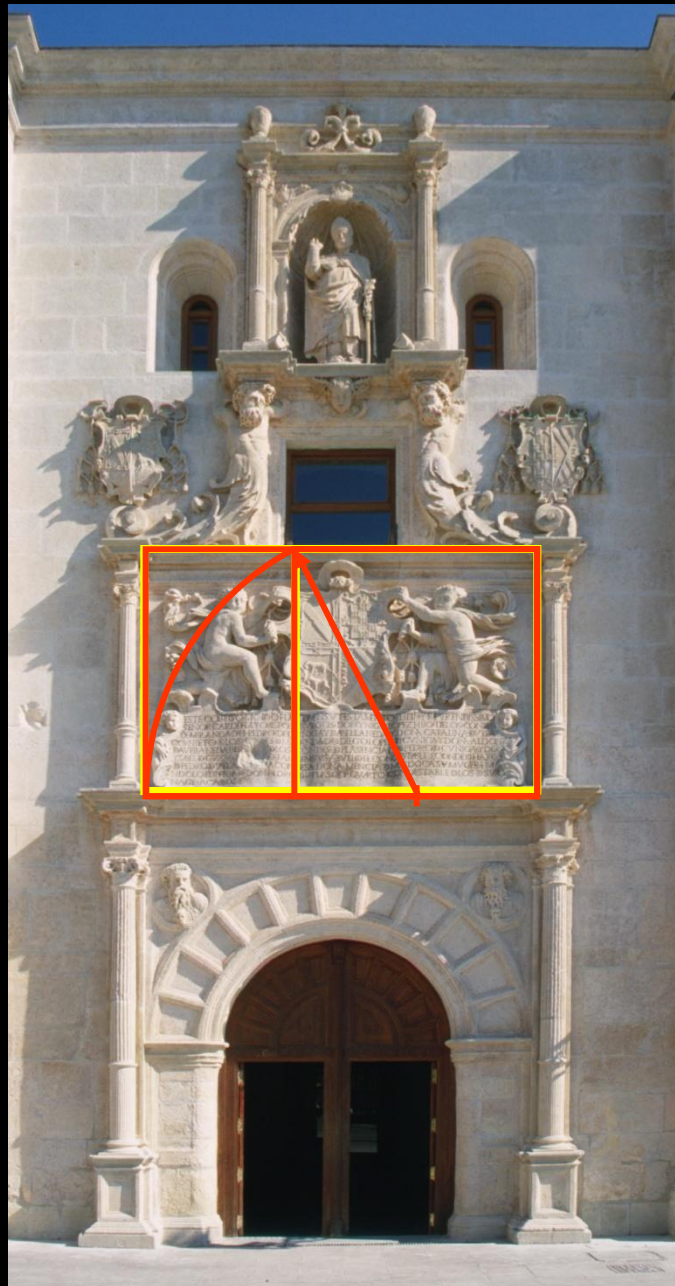
VÍCTOR CEBALLOS

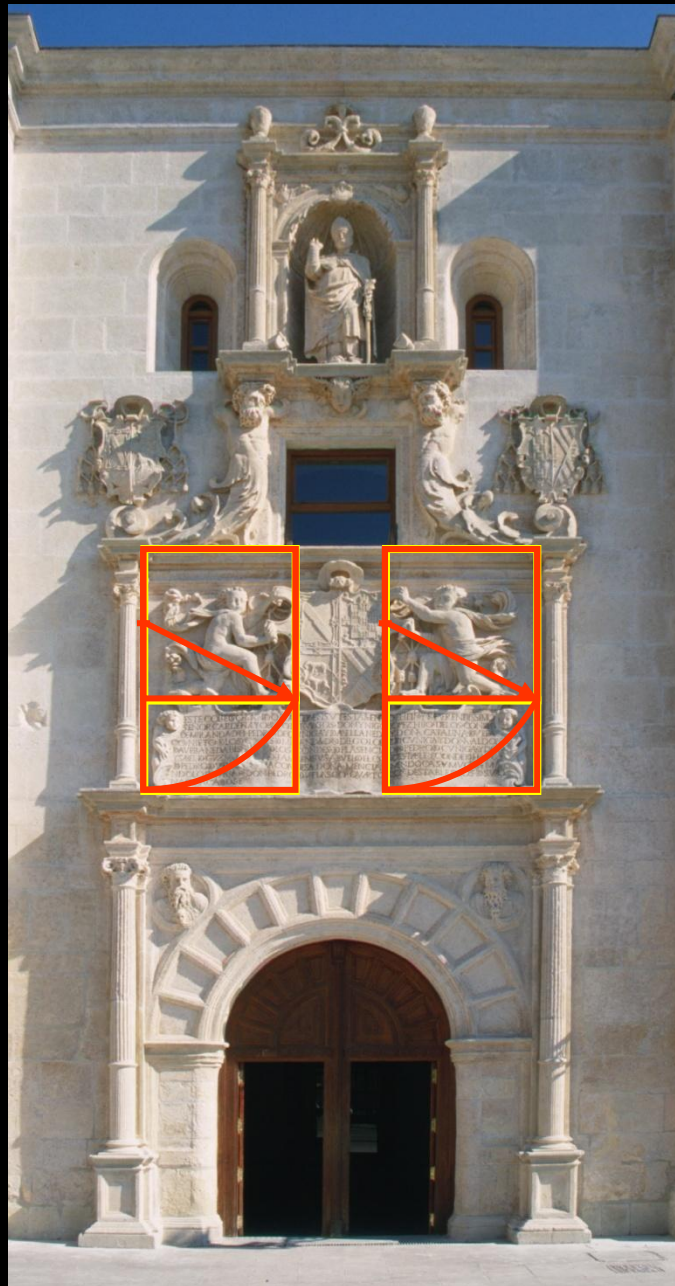
*SYMMETRÍA EN EL INSTITUTO:
PROPORCIÓN ÁUREA*

RECTÁNGULOS ÁUREOS
EN LA FACHADA

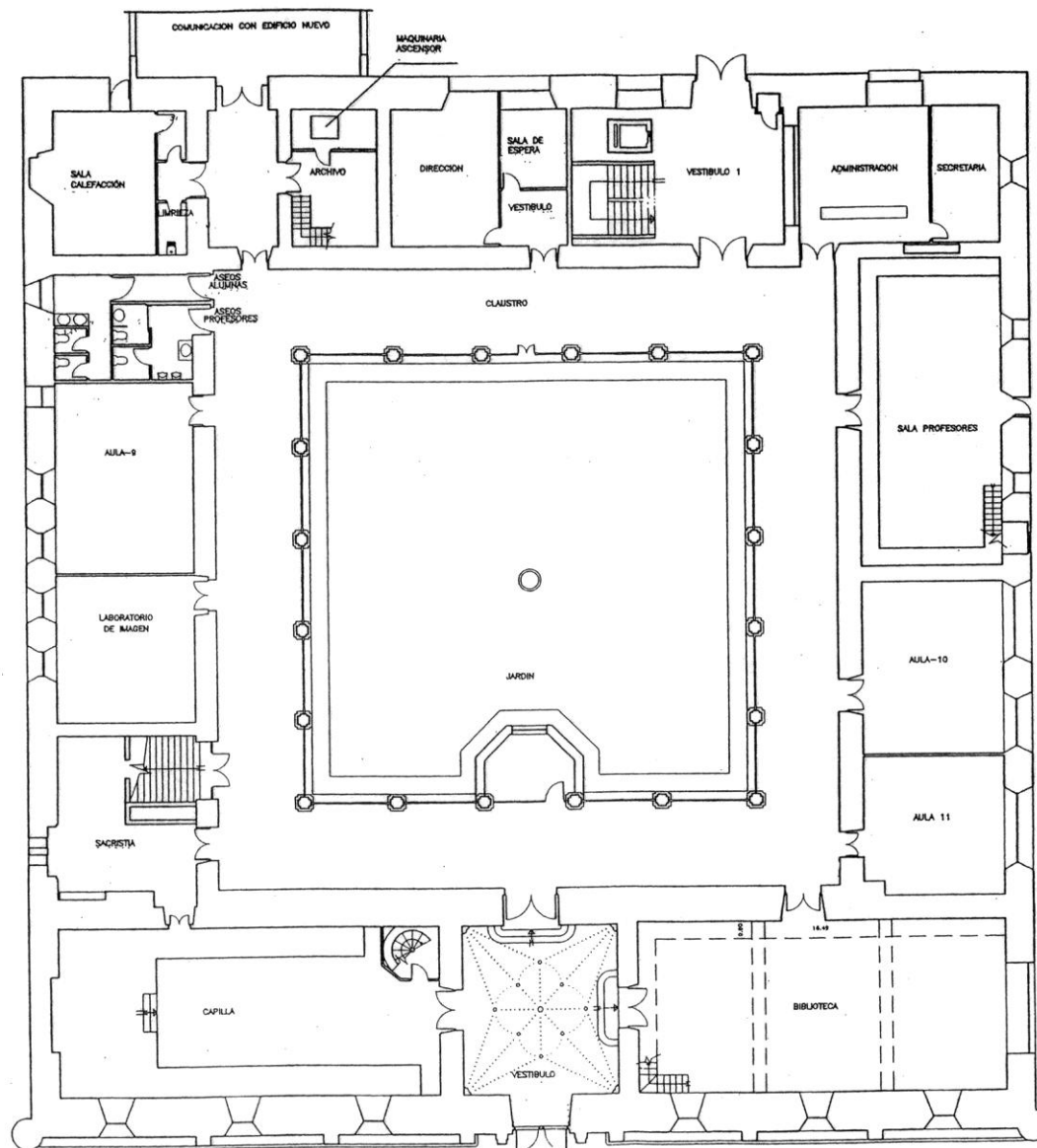




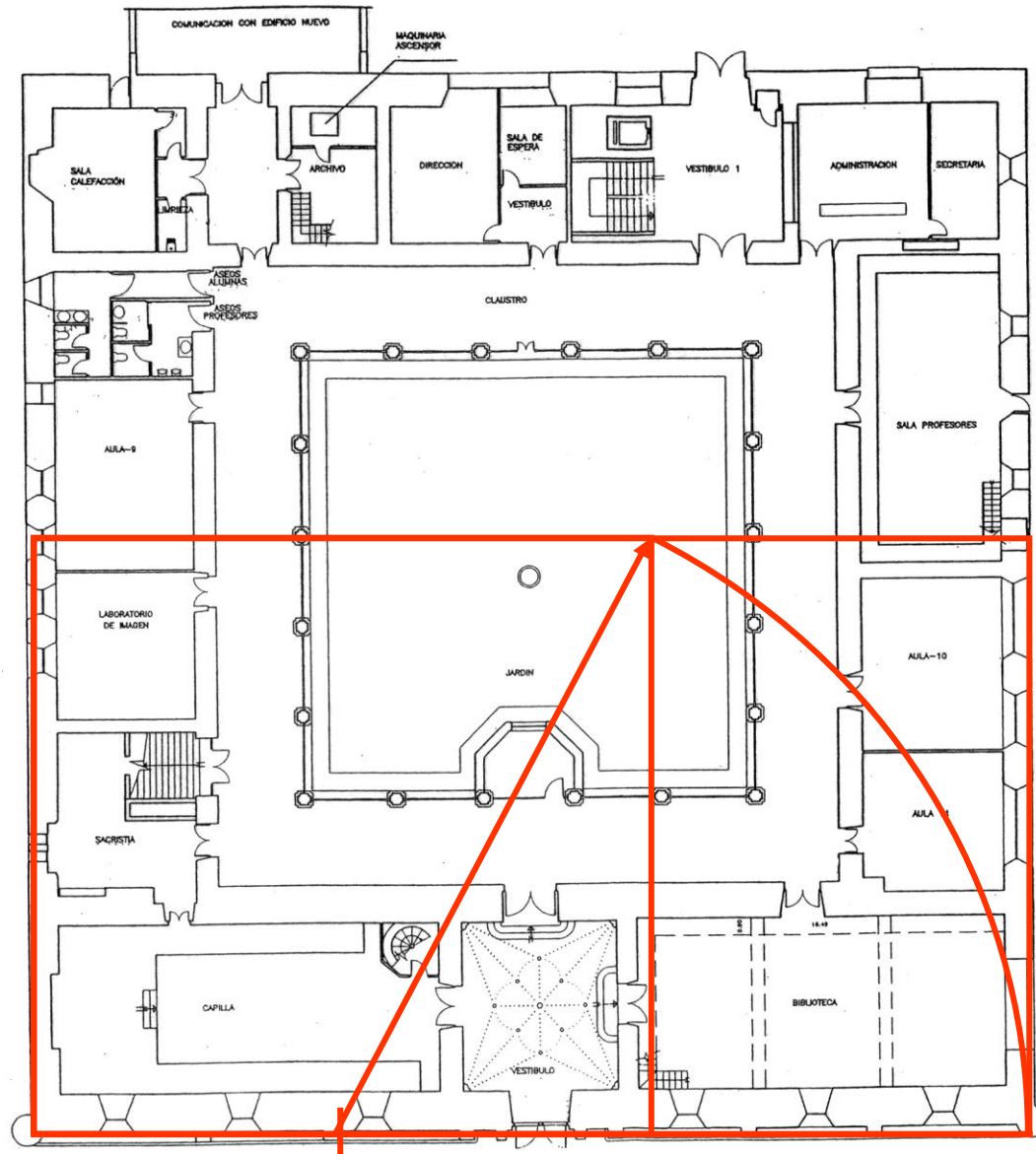




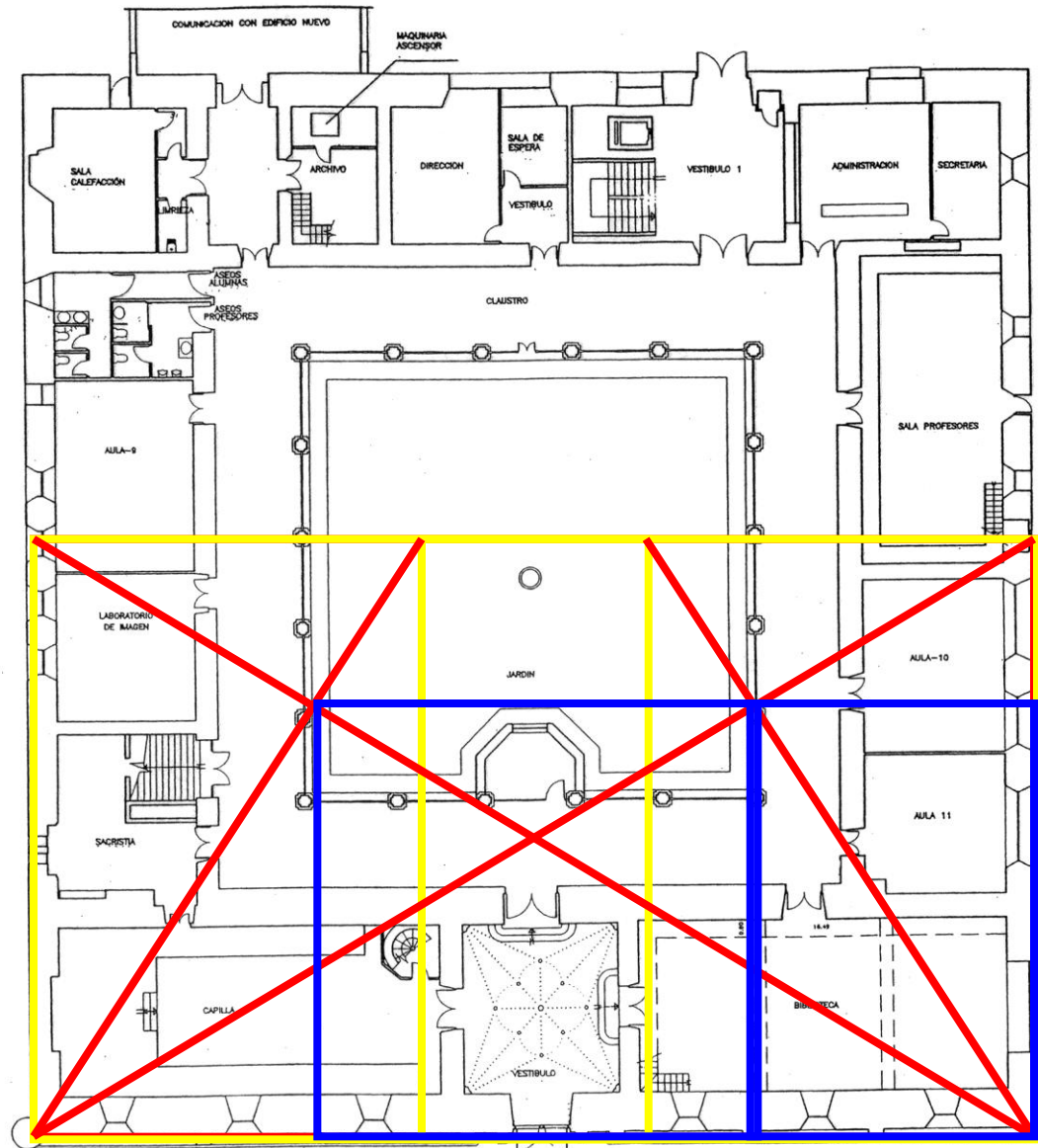
*RECTÁNGULOS ÁUREOS
EN EL INTERIOR*



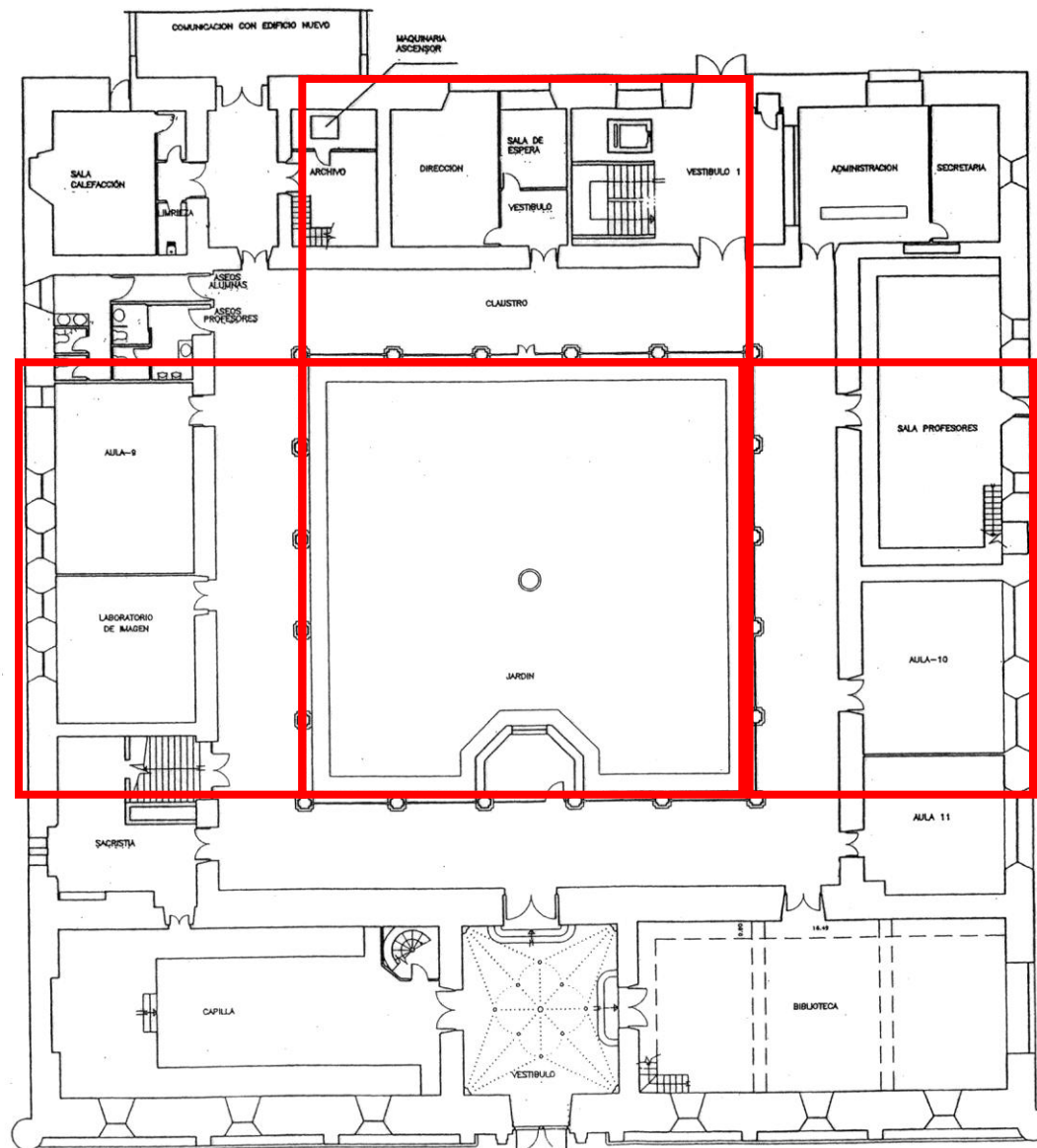
PLANTA BAJA



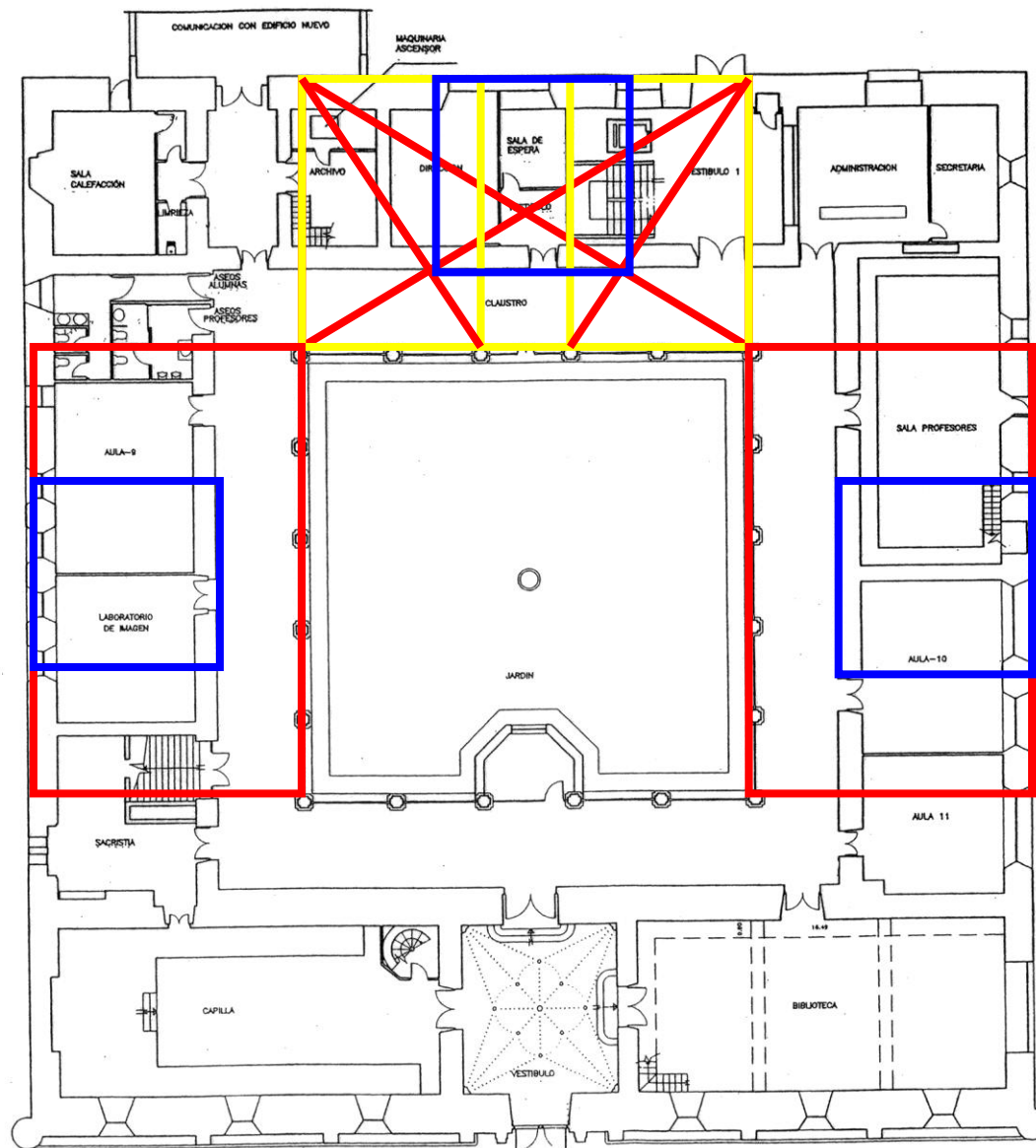
PLANTA BAJA



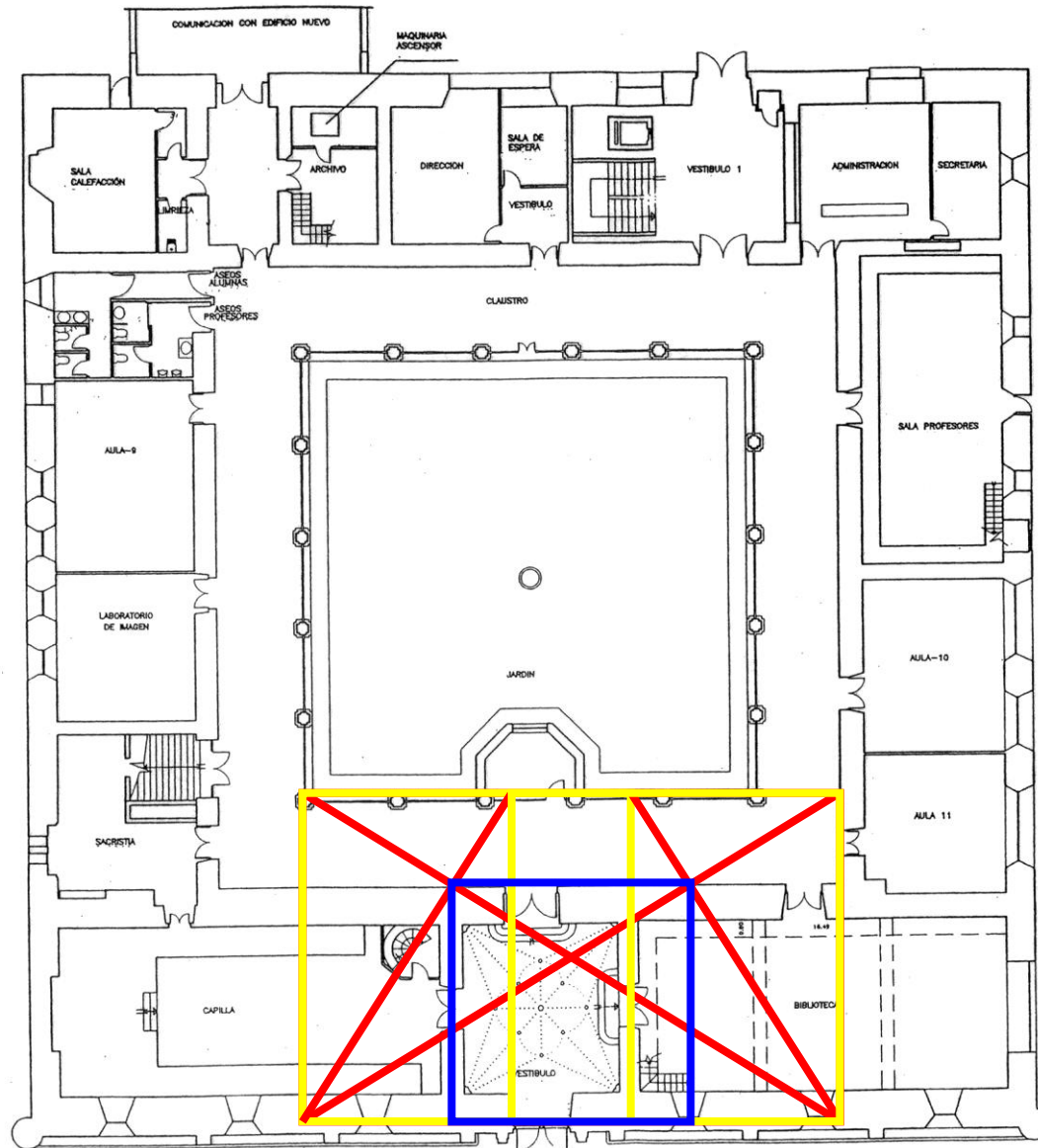
PLANTA BAJA



PLANTA BAJA



PLANTA BAJA



PLANTA BAJA

*CRECIMIENTO ARMONIOSO
EN EL INSTITUTO:
EL CRECIMIENTO ÁUREO*

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

$$\Phi + 1 = \Phi^2$$

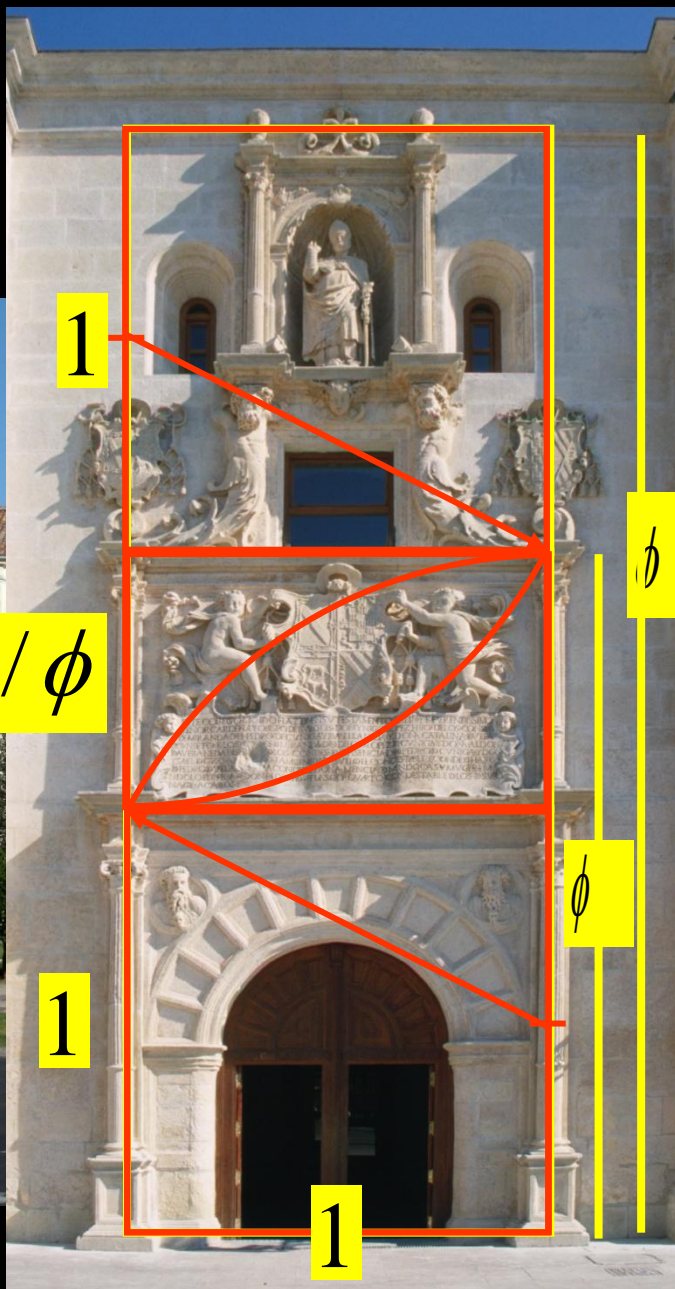
$$\Phi^2 + \Phi = \Phi^3$$

$$\Phi^3 + \Phi^2 = \Phi^4, \dots$$

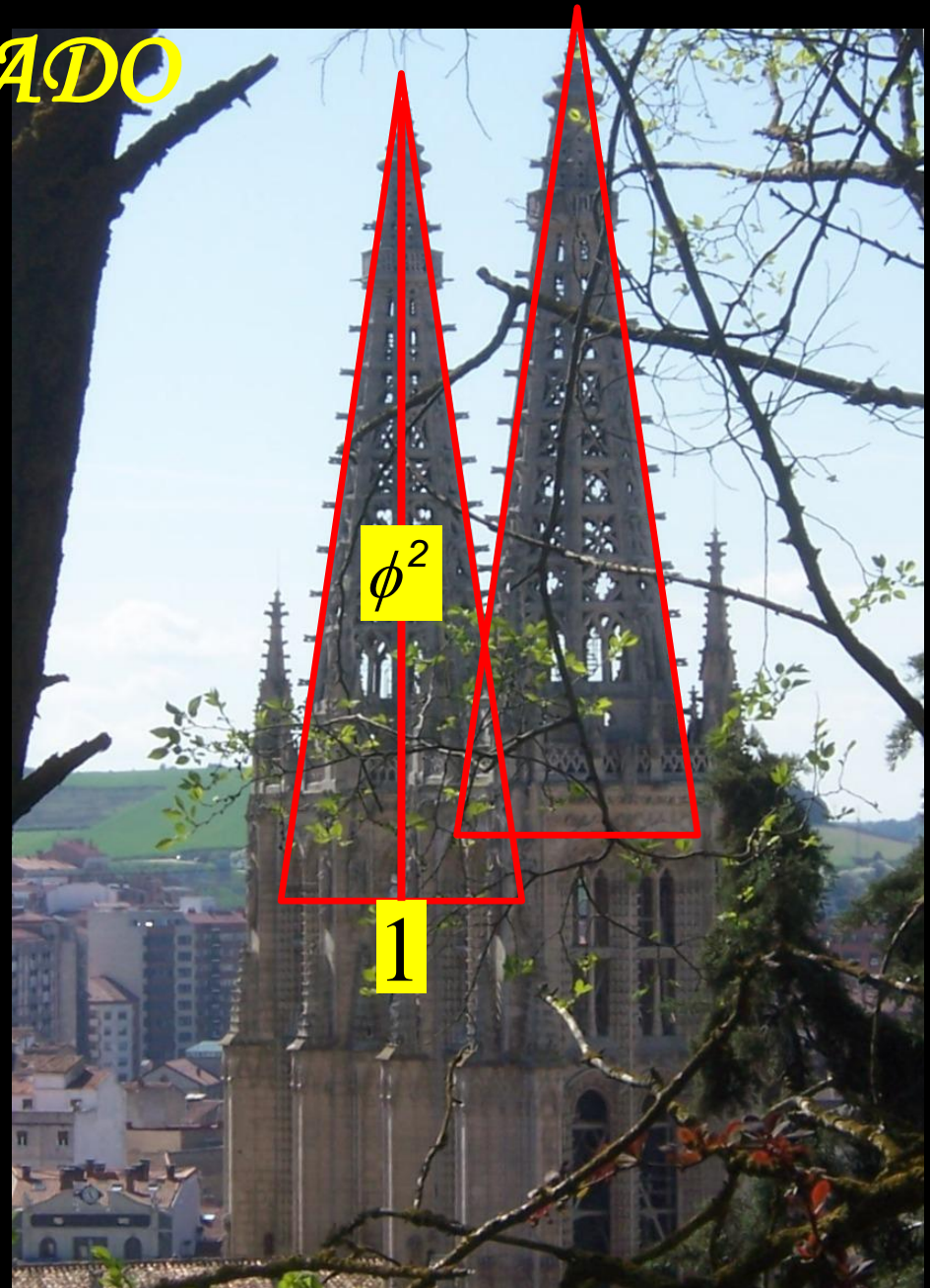
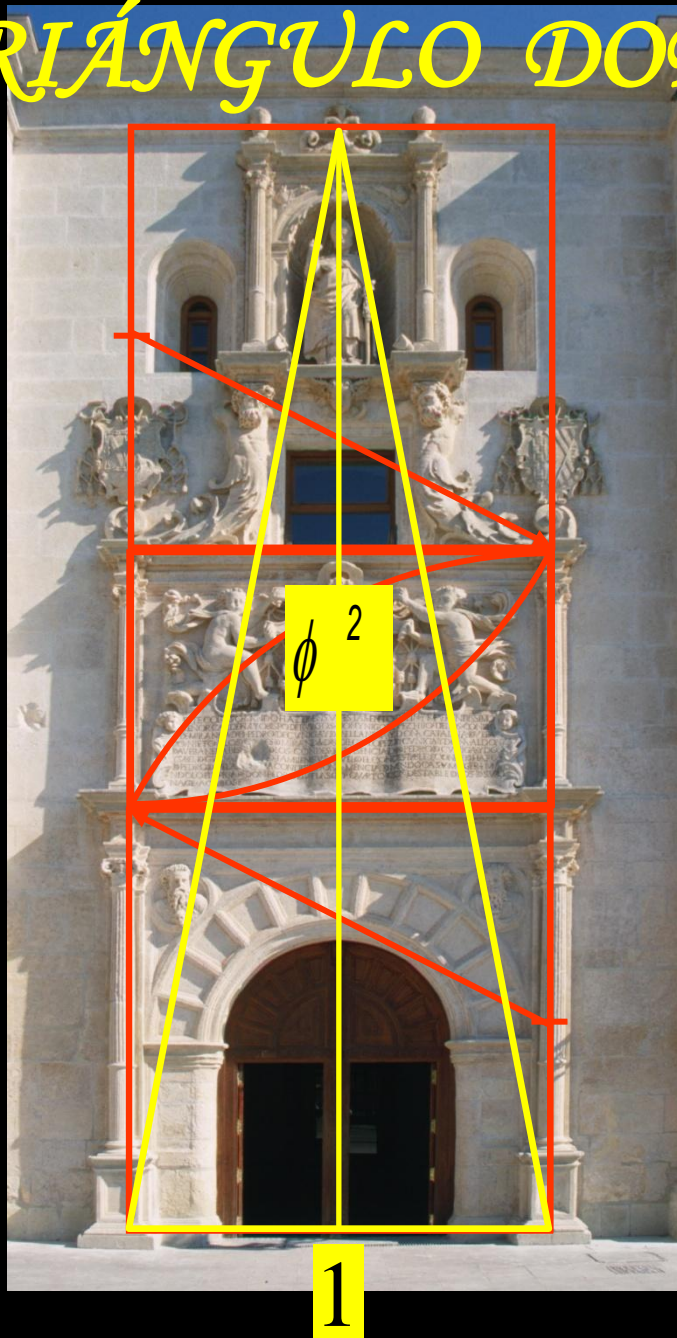
$$\dots, \frac{1}{\Phi^n}, \dots, \frac{1}{\Phi}, 1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots, \Phi^n, \dots$$

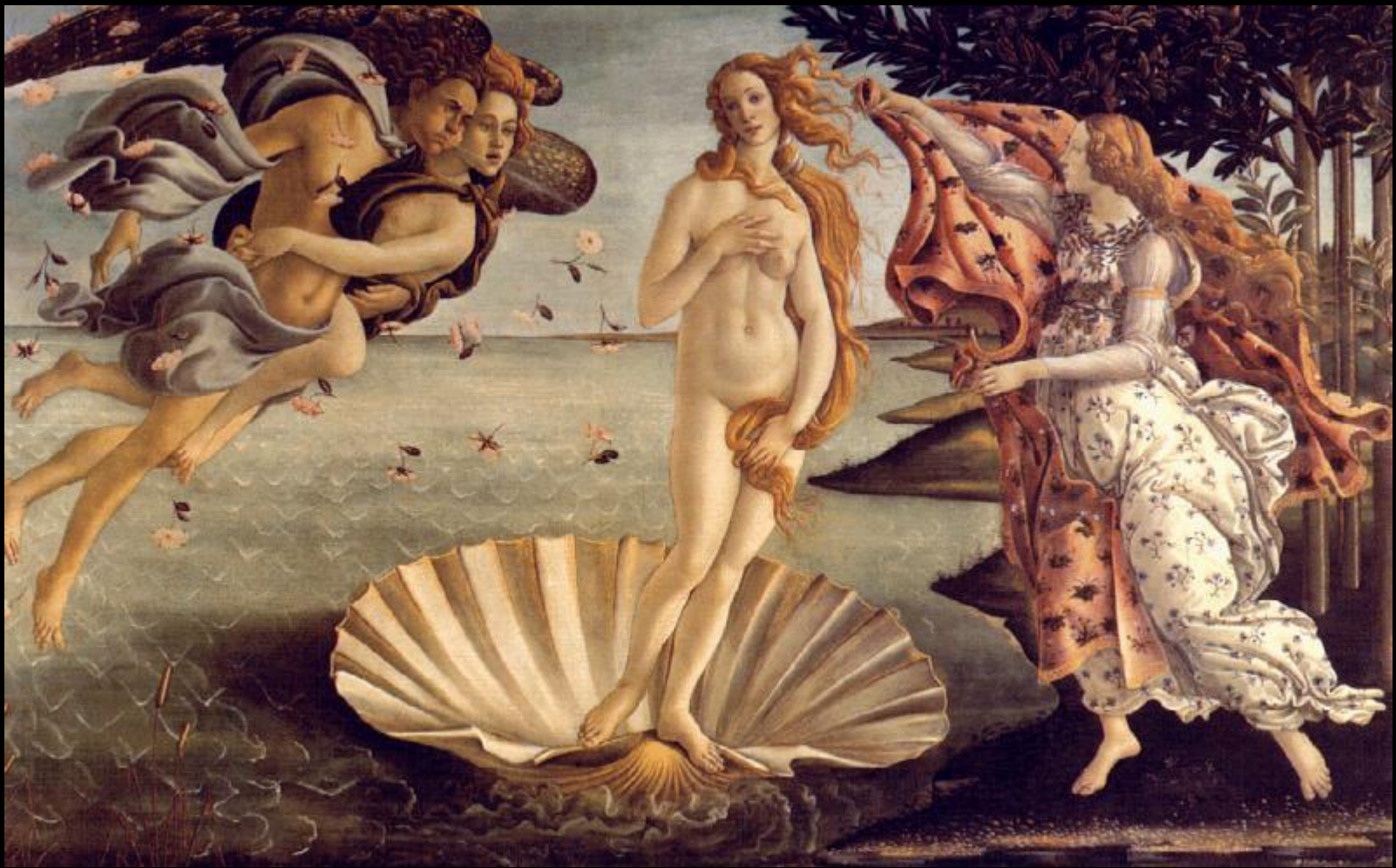
$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

$$\phi + 1 = \phi^2$$



TRIÁNGULO DORADO





Sandro Botticelli: El Nacimiento de Venus

POTÊNCIAS SUCESSIVAS DE Φ

1

$$\phi$$

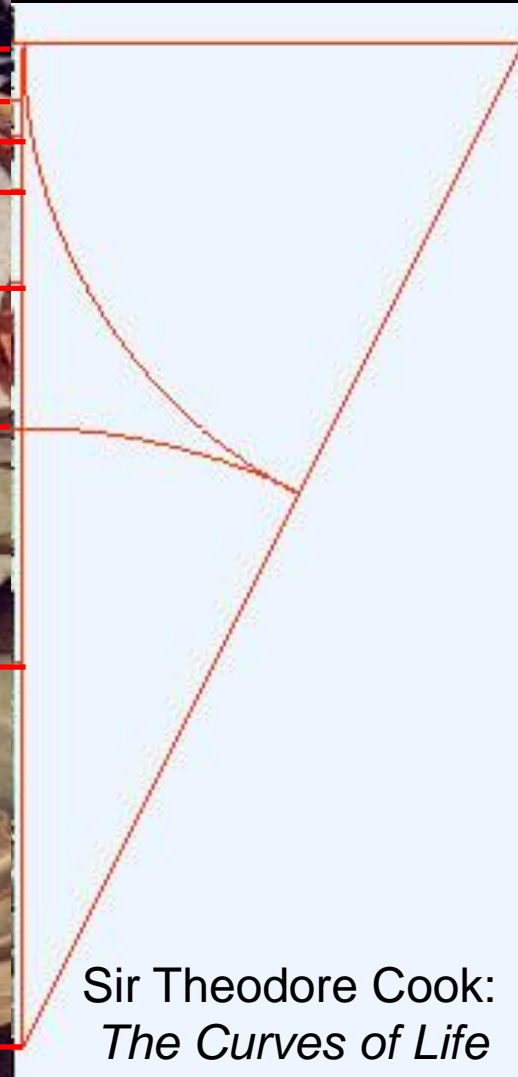
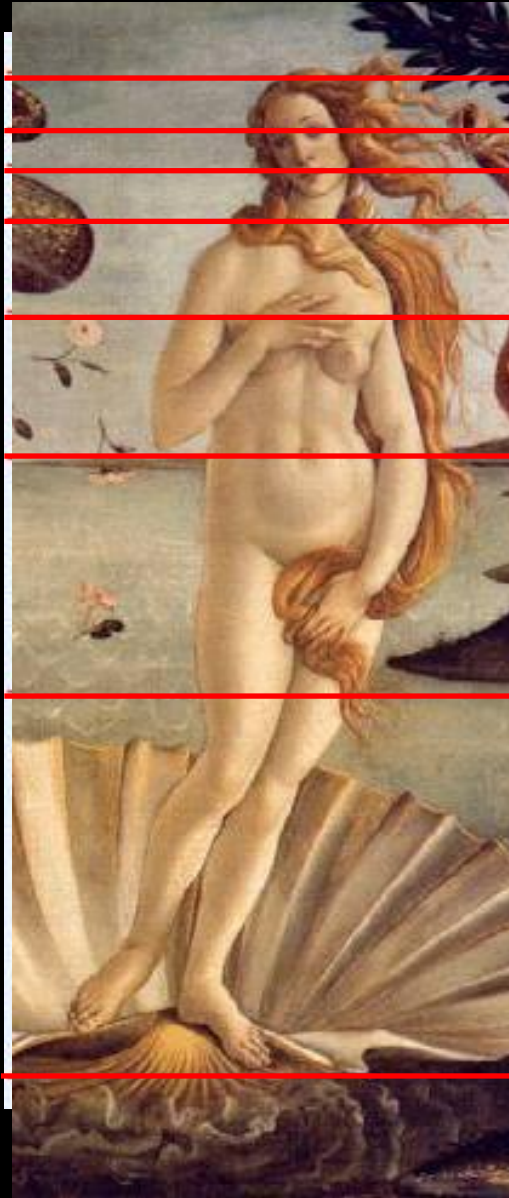
$$\phi$$

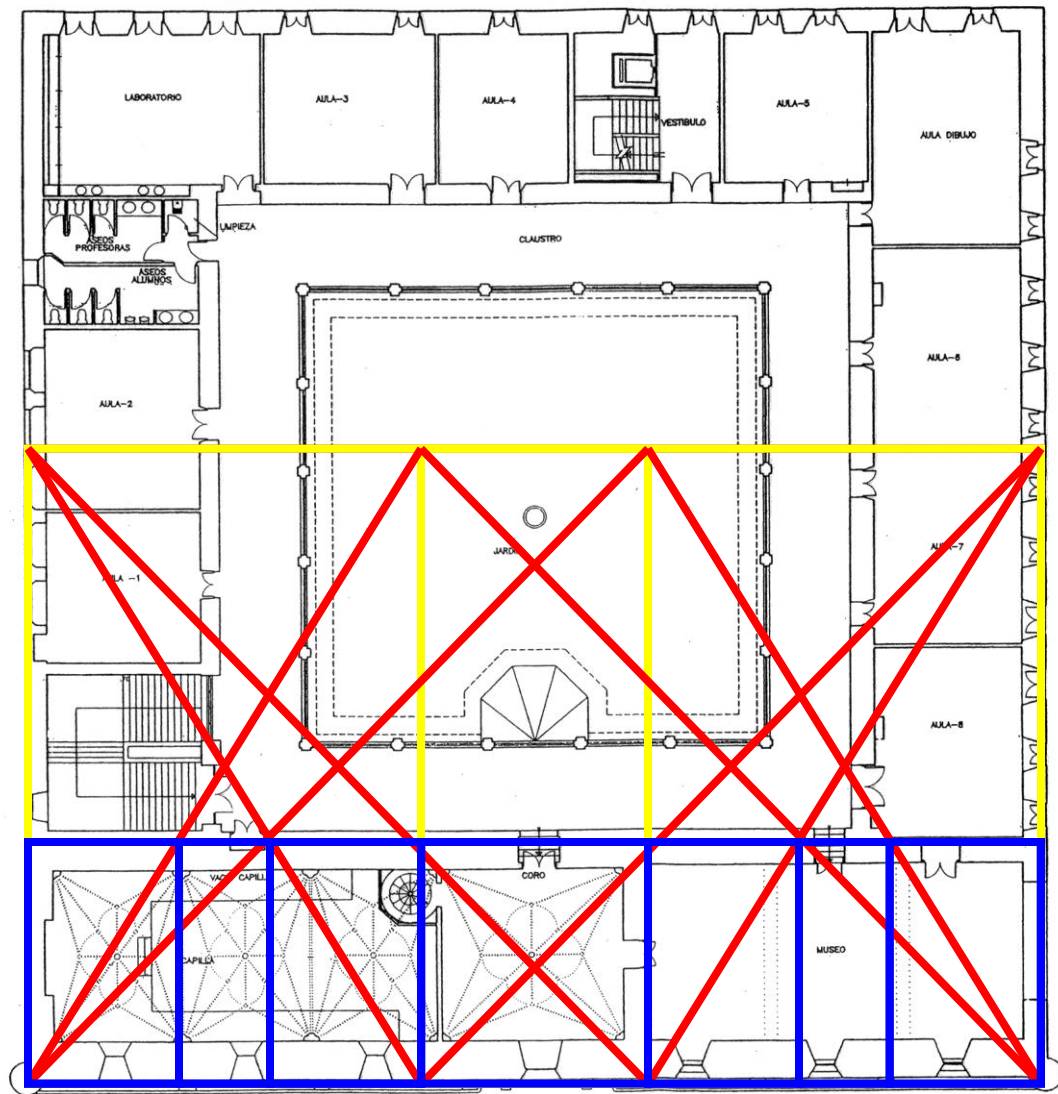
$$\phi^2$$

$$\phi^3$$

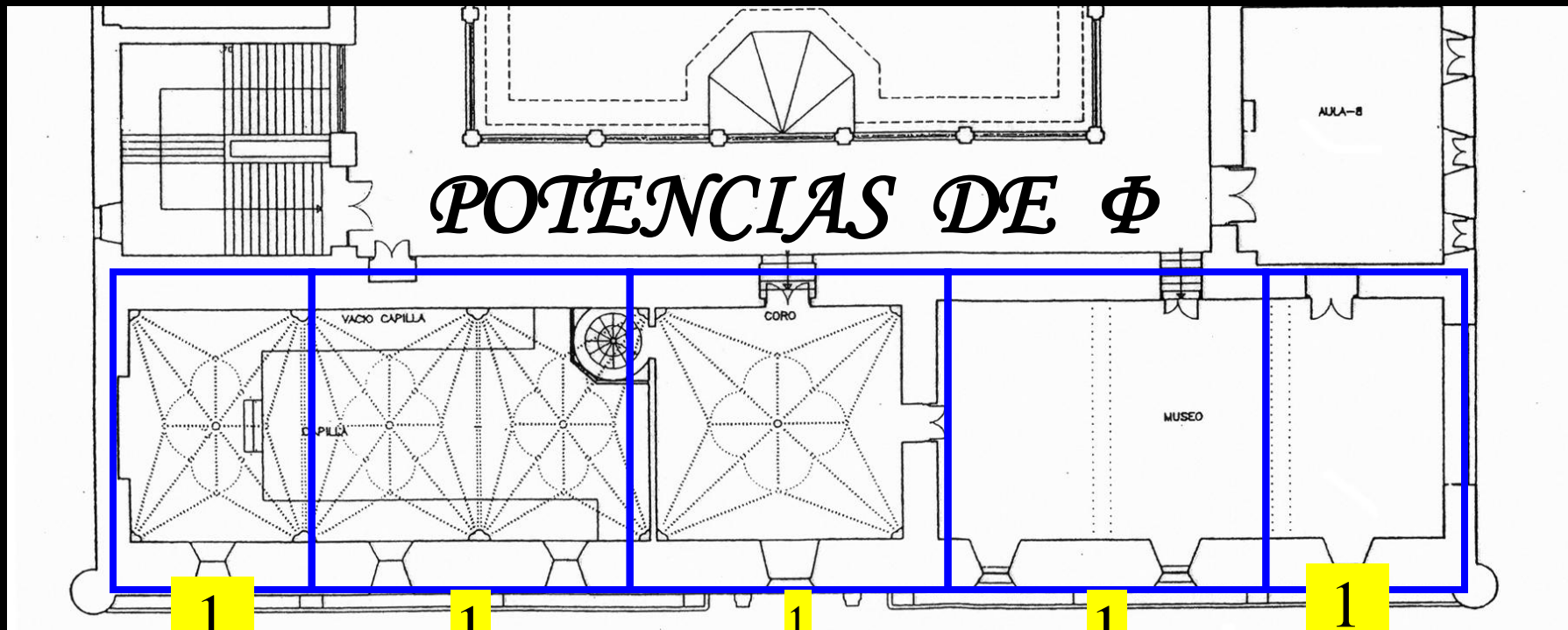
$$\phi^4$$

$$\phi^5$$





PLANTA PRIMERA



$$\frac{1}{\Phi}$$

$$1$$

$$1$$

$$1$$

$$\frac{1}{\Phi}$$

$$\frac{1}{\Phi}$$

$$1$$

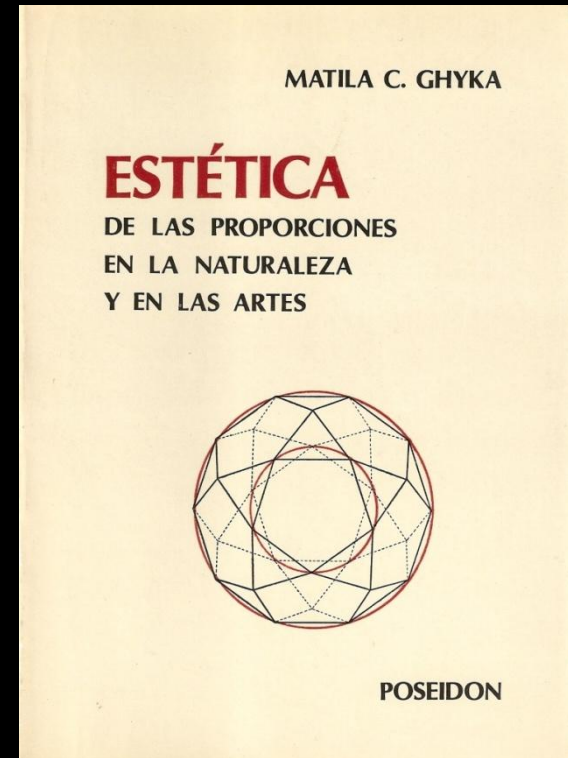
$$\Phi$$

$$\Phi^2$$

$$\Phi^3$$

Las relaciones encerradas en las formas naturales, o creadas por el artista, despiertan resonancias lógicas o afectivas en el que las contempla. Cuando la percepción de estas relaciones es consciente practicamos la Estética, ciencia de las relaciones armoniosas.

Matila C. Ghyka:
*Estética de la proporciones
en la naturaleza y en las artes*





MUCHAS GRACIAS

consdelafu@gmail.com